# ACADÉMIE DES SCIENCES.

## SÉANCE DU LUNDI 8 OCTOBRE 1945.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE CAULLERY.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

### DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **PAUL MONTEL** donne lecture d'une lettre que le professeur **SIERPIŃSKI**, de Varsovie, lui a adressée. M. Arnaud Denjoy a reçu une lettre semblable.

Mon cher Collègue et Ami,

Il m'a été impossible de vous écrire pendant les cinq dernières années et demie, qui furent tragiques pour l'École mathématique polonaise.

Les mathématiciens polonais nommés plus bas ont été assassinés par les Allemands pendant leur occupation de notre pays :

Stanislaw RUZIEWICZ, en 1939, Recteur de l'Académie du Commerce à Lwów, ancien professeur de l'Université de Lwów, tué par la Gestapo à Lwów en juillet 1941.

Antoine LOMNICKI, en 1939, Prorecteur de l'École Polytechnique de Lwów, tué par la Gestapo à Lwów en juillet 1941.

Wladimir STOZEK, doyen de l'École Polytechnique de Lwów, tué par la Gestapo à Lwów en juillet 1941.

Casimir BARTEL, professeur et ancien Recteur de l'École Polytechnique de Lwów, tué par la Gestapo à Lwów en juillet 1941.

Antoine HOBORSKI, ancien Recteur de l'Académie des Mines à Cracovie, Professeur à l'Université de Cracovie, est mort en 1940 dans le camp de concentration de Sachsenhausen (près de Berlin), où il fut transporté en novembre 1939 avec d'autres professeurs de l'Université de Cracovie, dont 17 sont également morts dans ce camp.

Stanislaw SAKS, chargé de cours à l'Université de Varsovie, tué par la Gestapo à Varsovie en 1943.

Aleksandre RAJCHMAN, professeur à l'Université libre de Varsovie, est mort en 1940 au camp de concentration de Dachau.

Adolphe LINDENBAUM, chargé de cours à l'Université de Varsovie, tué en 1942.

J. P. SCHAUDER, chargé de cours à l'Université de Lwów, tué en 1943.

H. AUERBACH, chargé de cours à l'Université de Lwów, tué en 1943.

JACOB, chargé de cours à l'Université de Lwów, tué par la Gestapo à Varsovie en 1943.

Antoine WILK, docteur en philosophie, qui a découvert plusieurs comètes portant son nom, est mort à Cracovie en 1940, le lendemain de son retour du camp de concentration d'Oranienburg.

Par suite des événements de guerre, sont morts encore :

S. DICKSTEIN, professeur d'honneur de l'Université de Varsovie, doyen d'âge des mathématiciens polonais, est mort en 1939 pendant une attaque aérienne.

Witold WILKOSZ, professeur à l'Université de Cracovie, est mort à Cracovie en 1943.

Stefan KEMPISTY, professeur à l'Université de Wilno, est mort en prison.

Antoine PRZEBORSKI, professeur à l'Université de Varsovie, est mort en 1941.

André KOZNIEWSKI, docteur en philosophie, est mort en 1939.

Stefan KWIETNIEWSKI, chargé de cours à l'Université de Varsovie, est mort en 1940.

Nous déplorons encore la mort de Stanislaw ZAREMBA, professeur d'honneur de l'Université de Cracovie (en 1943); celle de Stefan MAZURKIEWICZ, professeur à l'Université de Varsovie, et celle de Stefan BANACH, professeur à l'Université de Lwów.

Ce sont les pertes en personnes. Il est à souligner que les mathématiciens polonais assassinés, parfois cruellement, par les Allemands, ne cultivaient aucune politique : la seule raison de les tuer fut celle qu'ils étaient des savants *polonais* (et, dans quatre cas : leur « race »).

Dans le domaine des autres sciences, la situation est analogue.

Mais voici d'autres pertes irréparables :

Notre grande bibliothèque mathématique, qui se trouvait rue Oczki, 3 (au Séminaire Mathématique de l'Université de Varsovie) fut brûlée. Les bibliothèques privées de tous les mathématiciens de Varsovie (la mienne, celles de MM. Mazurkiewicz, Kuratowski, Borsuk et autres) furent brûlées, ainsi que nos maisons, pendant les mois d'août à octobre 1944. Plusieurs de nos manuscrits, résultats de notre travail pendant les années 1939-1944, sont perdus. Nous n'avons littéralement aucun livre, aucun tirage à part. En automne 1939, le volume 33 des *Fundamenta Mathematicae* était sous presse à Cracovie : 7 feuilles (112 pages) furent imprimées, les 10 suivantes étaient composées. Le directeur allemand de l'imprimerie a détruit la composition de ces 10 feuilles, dont les manuscrits et les épreuves sont brûlés, ainsi que les exemplaires des volumes 1-32 qui se trouvaient à Varsovie, ainsi que les exemplaires des volumes parus des *Monographies*

*mathématiques.* Il ne nous reste que quelques exemplaires de ces volumes qui étaient hors de Varsovie. C'est donc une catastrophe pour les *Fundamenta Mathematicae* et le *Monografje Matematysczne.*

Ma maison (rue Marszalkowska, 73) fut brûlée par les Brandkommandos à la fin d'octobre 1944, sans aucune raison stratégique, quelques semaines après l'évacuation de Varsovie de tous les habitants polonais. Le 2 octobre 1944, nous étions obligés de quitter Varsovie à pied et de marcher pendant 15$^{km}$ (pour atteindre le camp de distribution) sans pouvoir prendre de notre maison rien, sauf ce qu'on pouvait porter à la main. Nous avons ainsi perdu tout notre avoir. Cela avait lieu après avoir passé deux mois dans la ville assiégée et continuellement bombardée par les Allemands.

Le Siège de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, le palais Staszic, est brûlé. Nos Académies et nos Universités furent fermées et pillées par les Allemands en 1940. Des centaines de nos professeurs universitaires sont morts, tués dans les camps de concentration. Il n'y a presque aucune famille en Pologne qui n'ait perdu au moins un de ses membres tué ou martyrisé par les Allemands.

Provisoirement, je me trouve avec ma femme à Cracovie et j'y resterai probablement quelques mois. Les Allemands furent obligés de quitter Cracovie si rapidement qu'ils n'eurent pas le temps de détruire la ville. Cracovie est l'unique ville universitaire de Pologne où l'on pourra recommencer immédiatement l'enseignement universitaire.

Veuillez agréer, mon cher Collègue et Ami, l'expression de mes sentiments les plus cordiaux.

*Signé :* W. Sierpiński.

L'Académie décide que le texte de cette lettre sera inséré dans les *Comptes rendus.*

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'explication mécanique des équations de Maxwell.* Note de M. **Dimitri Riabouchinsky.**

Les équations de Maxwell étant linéaires, on peut obtenir la solution générale de ces équations par superposition d'ondes planes. Désignons respectivement par $\vec{i}_\nu, \vec{j}_\nu, \vec{k}_\nu$ les vecteurs unitaires du champ électrique $\vec{E}_\nu$, du champ magnétique $\vec{H}_\nu$ et celui de la vitesse de propagation $\vec{c}_\nu$ de l'onde plane considérée $\nu$ :

$$(1)\quad \vec{E}_\nu = E_\nu . \vec{i}_\nu = E_\nu(\alpha_{\nu_1} i + \beta_{\nu_1} j + \gamma_{\nu_1} k), \qquad \vec{H}_\nu = H_\nu . \vec{j}_\nu = H_\nu(\alpha_{\nu_2} i + \beta_{\nu_2} j + \gamma_{\nu_2} k),$$

$$\vec{c}_\nu = c\vec{k}_\nu = c(\alpha_{\nu_3} i + \beta_{\nu_3} j + \gamma_{\nu_3} k),$$

$i, j, k$ sont les vecteurs unitaires des axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ et les 9 cosinus directeurs sont indépendants des coordonnées et du temps, mais varient, en général,

lorsqu'on passe d'une onde à une autre. Prenons le produit scalaire de la première et le produit vectoriel de la seconde des équations de Maxwell par $\vec{i}_\nu$

$$\operatorname{curl}\vec{H}_\nu.\vec{i}_\nu = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_\nu}{\partial t}.\vec{i}_\nu, \qquad \operatorname{curl}\vec{E}_\nu \times \vec{i}_\nu = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_\nu}{\partial t}\times \vec{i}_\nu, \qquad \operatorname{div}\vec{E}_\nu = 0.$$

On obtient ainsi

$$(2) \qquad \operatorname{div}\vec{H'_\nu} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_\nu}{\partial t}, \qquad \operatorname{grad}\vec{E}_\nu = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H'_\nu}}{\partial t}, \qquad \vec{H'_\nu} = H_\nu \vec{k}_\nu.$$

Ce n'est que le tenseur de $\vec{E}_\nu$ qui figure dans ces équations transformées, tandis que $\vec{H}_\nu$ subit une rotation positive d'un angle droit dans le plan des vecteurs $\vec{H}_\nu$ et $\vec{c}_\nu$. Nous désignons $\vec{H'_\nu}$ ce nouveau vecteur, dont le tenseur est celui de $\vec{H}_\nu$ et l'orientation celle de $\vec{c}_\nu$. En faisant subir une transformation analogue à toutes les solutions particulières $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient un nombre correspondant d'équations de la forme (2) et, en prenant la somme de ces dernières, on peut écrire

$$(3) \qquad \operatorname{div}\vec{H'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad \operatorname{grad}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H'}}{\partial t}.$$

Les solutions générales des équations de Maxwell et des équations transformées (3) sont donc respectivement

$$\vec{H} = \sum_\nu \vec{H}_\nu, \qquad \vec{E} = \sum_\nu \vec{E}_\nu, \qquad \text{et} \qquad \vec{H'} = \sum_\nu \vec{H'_\nu}, \qquad E = \sum_\nu E_\nu.$$

Multiplions la première des équations (3) par E, la seconde par $\vec{H'}$, additionnons-les et considérons les intégrales

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{1}{2}(E^2 + H'^2)\,d\tau = -c\iiint\left(E\operatorname{div}\vec{H'} + \vec{H'}\operatorname{grad}\vec{E}\right)d\tau = -c\iint E\vec{H'}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

En comparant (4) à la formule de Poynting,

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\,d\tau = -c\iint\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\vec{n}\,d\sigma,$$

déduite directement des équations de Maxwell, on peut constater que (4) et (5) sont équivalents s'il y a une seule onde ou si tous les vecteurs $\vec{E}_\nu$ sont collinéaires. Si cette dernière condition est satisfaite, tous les $\vec{H}_\nu$ et $\vec{H'_\nu}$ sont coplanaires et les tenseurs de leur somme respective $\vec{H}$ et $\vec{H'}$ sont égaux, donc $H^2 = H'^2$. On a aussi $E\vec{H'} = \vec{E}\times\vec{H}$, car $H'$ est perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Ce cas particulier correspond à un problème discuté antérieurement [1]. Mais si les vecteurs $\vec{E}_\nu$ cessent d'être tous collinéaires, le vecteur radiant de Poynting $\vec{E}\times\vec{H}$ n'est pas, en général, égal au vecteur radiant $\overrightarrow{EH'}$. Les équations (3) et (4) correspondent à un gaz parfait et celles de Maxwell et Poynting à l'éther. Les équations obtenues établissent une correspondance directe entre les grandeurs caractérisant ces deux milieux et permettent de reconnaître tout désaccord avec l'hydrodynamique classique. Nous avons nommé [2] *hydrodynamiques non lagrangiennes* toutes celles où, en conservant la cinématique des milieux continus, on modifie la définition newtonienne *vecteur force égale produit de scalaire masse par vecteur accélération*.

Pour démontrer qu'on peut passer des équations (2) et (3) à celles qui régissent les petits mouvements irrotationnels d'un fluide parfait compressible, posons

$$E=\frac{\sqrt{\rho_1}}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=c\frac{\rho-\rho_1}{\sqrt{\rho_1}}=\frac{p-p_1}{c\sqrt{\rho_1}},\qquad \vec{H}'=\frac{\sqrt{\rho_1}}{c}\sum\frac{\partial\vec{\psi}'_\nu}{\partial t}=\sqrt{\rho_1}\sum\vec{V}_\nu,$$

où $\vec{V}_\nu$ exprime la vitesse des particules fluides, normale au plan de l'onde $\nu$. En faisant ces substitutions dans (3), en faisant quelques transformations et en omettant des fonctions arbitraires des coordonnées, mais indépendantes du temps, il vient

$$(6)\qquad \operatorname{div}\vec{\psi}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\qquad \operatorname{grad}\varphi=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\psi}'}{\partial t},\qquad \Box\varphi=0,\qquad \Box\vec{\psi}'=0.$$

De même l'équation (4) devient

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\rho_1\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\operatorname{grad}^2\varphi+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]d\tau=\frac{\partial}{\partial t}\iiint(T+W)\,d\tau=\rho_1\iint\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma,$$

T et W sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie intrinsèque d'un fluide parfait compressible. (6) et (7) sont effectivement une conséquence directe de (3) et (4). C. Q. F. D.

Pour revenir au fluide maxwellien, il faut prendre le produit scalaire de la première et le produit vectoriel de la seconde des équations (6), pour chaque onde plane $\nu$, par le vecteur unitaire $\vec{i}_\nu$, transformer ensuite ces produits en tenant compte des relations entre les 9 cosinus (1) et prendre leur somme. Avec ces transformations il vient

$$\vec{E}=\frac{\sqrt{\rho_1}}{c}\sum\frac{\partial\varphi_\nu\vec{i}_\nu}{\partial t},\qquad \vec{H}=\sqrt{\rho_1}\,\vec{V}=\frac{\sqrt{\rho_1}}{c}\sum\frac{\partial\psi_\nu\vec{j}_\nu}{\partial t}=-\sqrt{\rho_1}\operatorname{curl}\sum\varphi_\nu\vec{i}$$

$$\operatorname{curl}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\qquad \operatorname{curl}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{E}=0,\qquad \operatorname{div}\vec{H}=0.$$

---

[1] *Comptes rendus*, 206, 1938, pp. 472-475.

[2] *Atti del Congresso internazionale dei Matematici*, Bologna, 1928, v, p. 175.

Le fluide qu'on obtient ainsi est incompressible et son mouvement est rotationnel. Le champ magnétique $\vec{H}$ est proportionnel à la vitesse $\vec{V}$ et la variation dans le temps du champ électrique $\vec{E}$ au tourbillon de $\vec{V}$. Nous avons établi ainsi une correspondance univoque et réciproque entre tous les éléments des champs gazodynamiques et électromagnétiques.

M. **Serge Bernstein** fait hommage à l'Académie de cinq Mémoires extraits des *Comptes rendus* et du *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes*.

## NOMINATIONS.

L'Académie désigne MM. **Georges Perrier**, **Albert Michel-Lévy**, Membres de l'Académie; et MM. **Jean Rothé**, **Frédéric Diénert** et **Laclavère** pour représenter la France à l'Assemblée des Comités exécutifs de l'*Union géodésique et géophysique internationale*, qui se tiendra à Oxford, vraisemblablement du 10 au 17 décembre 1945.

## CORRESPONDANCE.

M. **Albert Goris** prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Botanique par le décès de M. *Alexandre Guilliermond*.

A l'appui de sa candidature il fait hommage à l'Académie de son Ouvrage *Localisation et rôle des alcaloïdes et des glucosides chez les Végétaux*, dont M. Léon Guignard avait écrit la *Préface*.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les espaces riemanniens harmoniques de type hyperbolique normal.* Note [1] de MM. **André Lichnerowicz** et **A. G. Walker**, transmise par M. Élie Cartan.

On sait qu'un espace riemannien $V_n$ est dit *harmonique* en un point $M_0$, si l'équation de Laplace associée admet une solution qui ne soit fonction que de la distance géodésique $s$ du point courant M à $M_0$. Un espace harmonique en chacun de ses points est dit *complètement harmonique* et nous le désignerons dans la suite par $H_n$; un espace $H_n$ dont l'équation de Laplace admet la solution $s^{2-n}$ est dit *simplement harmonique*.

Copson et Rusc [2] ont fourni, sous la forme d'un système infini d'équations

---

[1] Séance du 17 septembre 1945.

[2] *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 60, 1939, pp. 117-133.

tensorielles, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit un $H_n$. Il résulte en particulier de ce système que tout espace $H_n$ est un espace d'Einstein. Dans le même travail Copson et Rusc ont posé le problème fondamental suivant : *les espaces à courbure constante sont-ils les seuls espaces complètement harmoniques ?* Il est clair que c'est le cas pour $H_n$ quand

1° $n=2$ ou 3;

2° $H_n$ est conforme à un espace euclidien.

L'un des auteurs [3] a établi que ce résultat s'étendait à tout $H_n$ de type elliptique réalisable comme hypersurface d'un espace à courbure constante, en particulier à tout $H_n$ de type elliptique et de classe 1. L'autre auteur [4] a enfin établi qu'il s'étendait aussi pour $n=4$ à tout $H_n$ de type hyperbolique normal. Nous nous proposons, dans cette Note, de résoudre complètement le problème, dans le cas du type hyperbolique normal, en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout espace complètement harmonique* H *de type hyperbolique normal est à courbure constante.*

Posons en effet

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu}=g_{\alpha\beta,\lambda\mu}-\frac{f'(0)}{2(n-1)}(2g_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta}-g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\mu\alpha}),$$

où $g_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ désigne l'extension seconde du tenseur métrique, $f'(0)$ la dérivée première à l'origine de la fonction $f(\Omega)$ de Copson et Rusc et où les indices grecs prennent les valeurs $[0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$. Le tenseur $T_{\alpha\beta\lambda\mu}$ satisfait aux identités

$$(1)\qquad \begin{cases} T_{\alpha\beta\gamma\mu}=T_{\beta\alpha\lambda\mu}=T_{\alpha\beta\mu\lambda}=T_{\lambda\mu\alpha\beta}, \\ T_{\alpha\beta\lambda\mu}+T_{\alpha\lambda\mu\beta}+T_{\alpha\mu\beta\lambda}=0. \end{cases}$$

L'espace considéré étant complètement harmonique satisfait aux équations de Copson et Rusc, dont les deux premiers groupes peuvent se mettre sous la forme simple

$$(2)\qquad T_{\alpha\beta\lambda}{}^{\lambda}=0,$$

$$(3)\qquad T_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}T_{\gamma\delta\lambda\mu}+T_{\alpha\gamma}{}^{\lambda\mu}T_{\beta\delta\lambda\mu}+T_{\alpha\delta}{}^{\lambda\mu}T_{\beta\gamma\lambda\mu}=k(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}+g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}+g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

où $k$ désigne un scalaire constant. En multipliant (3) par $g^{\gamma\delta}$ et en tenant compte de (2), il vient

$$(4)\qquad T_{\alpha}{}^{\lambda\mu\nu}T_{\beta\lambda\mu\nu}=\frac{1}{2}(n+2)kg_{\alpha\beta},$$

et, par contraction,

$$(5)\qquad T^{\lambda\mu\nu\rho}T_{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{1}{2}n(n+2)k.$$

Cela étant posé, adoptons un système de coordonnées orthogonal en un point

---

[3] LICHNEROWICZ, *Comptes rendus*, 218, 1944, pp. 117-133.

[4] WALKER, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 7, 1940, pp. 16-26.

quelconque M de $H_n$, de telle sorte qu'au point M

$$g_{00} = -1; \quad g_{ii} = 1; \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

où les indices latins ne prennent que les valeurs $[1, 2, \ldots, (n-1)]$. En faisant dans (3), $a = \beta = \gamma = \delta = 0$, il vient

$$(6) \qquad \sum_{i,j} (T_{00ij})^2 = k.$$

De même, pour $\alpha = \beta = 0$, on déduit de (4) à l'aide des égalités (1) et (6),

$$(7) \qquad \sum_{i,j,k} (T_{0ijk})^2 = -\frac{1}{2}(n-1)k.$$

En comparant (6) et (7), il vient $k = 0$ et en vertu de ces équations et de (5)

$$T_{00ij} = 0; \quad T_{0ijk} = 0; \quad T_{ijkl} = 0.$$

Le tenseur $T_{\alpha\beta\lambda\mu}$ étant identiquement nul, l'espace $H_n$ considéré est à courbure constante.

De ce théorème on déduit immédiatement la conséquence suivante : l'*espace euclidien de type hyperbolique normal est le seul espace simplement harmonique de ce type*. Le même résultat est d'ailleurs valable pour les espaces de type elliptique, d'après T. Y. Thomas et E. W. Titt.

## ALGÈBRE TOPOLOGIQUE. — *Sur les corps topologiques connexes.* Note de M. Jean Dieudonné, présentée par M. Élie Cartan.

1. M. E. Livenson [1] a construit un exemple d'un sous-groupe *connexe* du groupe additif $\mathbf{R}^2$ (plan numérique), *partout dense* dans $\mathbf{R}^2$ et distinct de ce dernier. Je me propose de montrer comment, en conservant le principe de la méthode de Livenson, on peut en simplifier la mise en œuvre, et obtenir en même temps davantage, savoir un exemple de *sous-corps connexe* du corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, *partout dense* dans $\mathbf{C}$ et distinct de ce dernier.

2. La méthode de Livenson s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme (Livenson). — *Si une partie partout dense* A *de* $\mathbf{R}^2$ *rencontre tout sous-ensemble parfait non vide de* $\mathbf{R}^2$, *elle est connexe.*

Dans le cas contraire, il existerait deux ensembles ouverts non vides V, W dans $\mathbf{R}^2$ tels que A soit réunion de $A \cap V$ et $A \cap W$, et que $A \cap V \cap W$ soit vide; comme A est partout dense, $V \cap W$ est donc nécessairement vide, et par suite l'extérieur de V n'est pas vide. Il en résulte que la frontière F de V contient un ensemble parfait non vide; or F ne rencontre ni V ni W, donc ne peut rencontrer A, et nous obtenons un résultat contraire à l'hypothèse.

(1) *Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 920.

On notera que ce raisonnement (et par suite le lemme) est encore vrai quand on y remplace $\mathbf{R}^2$ par un domaine quelconque de $\mathbf{R}^2$ (ou plus généralement de $\mathbf{R}^n$).

3. Procédant comme Livenson, rangeons les sous-ensembles parfaits de $\mathbf{R}^2$ en une suite transfinie $(P_\alpha)$ telle que, pour tout indice $\alpha$, l'ensemble des indices $\leq \alpha$ ait une puissance strictement inférieure au continu. Nous allons définir par récurrence transfinie une suite $(u_\alpha)$ d'éléments de $\mathbf{C}$ telle que le corps $K_\alpha$ obtenu par adjonction, au corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, de tous les $u_\beta$ d'indice $\beta \leq \alpha$ soit une *extension transcendante pure* ([2]) du corps $\mathbf{Q}$ et rencontre tous les ensembles parfaits $P_\beta$ d'indice $\beta \leq \alpha$. Supposons en effet cette définition faite pour tous les indices $\beta < \alpha$. La réunion $K'_\alpha$ de tous les corps $K_\beta$ d'indice $\beta < \alpha$ est une extension transcendante pure de $\mathbf{Q}$, car un nombre fini quelconque de $u_\beta$ d'indice $\beta < \alpha$ appartiennent à un même corps $K_\gamma$ d'indice $\gamma < \alpha$, donc sont algébriquement indépendants par rapport à $\mathbf{Q}$. Comme $K'_\alpha$ s'obtient par adjonction à $\mathbf{Q}$ des $u_\beta$ d'indice $\beta < \alpha$, et que $\mathbf{Q}$ est dénombrable, on a une puissance $K'_\alpha$ égale à celle de l'ensemble des indices $\beta < \alpha$, donc strictement inférieure à celle du continu; la puissance de l'ensemble des nombres complexes, algébriques par rapport à $K'_\alpha$, est donc aussi strictement inférieure au continu; par suite, comme $P_\alpha$ a la puissance du continu, il existe dans $P_\alpha$ un élément $u_\alpha$ qui est transcendant par rapport à $K'_\alpha$; par adjonction de $u_\alpha$ à $K'_\alpha$, on obtient donc une extension transcendante pure $K_\alpha$ de $\mathbf{Q}$, qui a les propriétés désirées.

Soit alors K le sous-corps de $\mathbf{C}$ réunion de tous les $K_\alpha$; c'est une extension transcendante pure de $\mathbf{Q}$, évidemment partout dense dans $\mathbf{C}$ et qui rencontre tous les sous-ensembles parfaits de $\mathbf{C}$; d'après le lemme, K est connexe et distinct de $\mathbf{C}$ puisque $\mathbf{C}$ contient des éléments algébriques par rapport à $\mathbf{Q}$.

Le corps K rencontre aussi tous les sous-ensembles parfaits contenus dans un cercle (ouvert) de centre o; l'application du lemme (où le cercle remplace $\mathbf{R}^2$) prouve donc que K est *localement connexe*.

4. On sait ([2]) que le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels est une extension algébrique d'une extension transcendante pure $K_0$ du corps $\mathbf{Q}$; comme $\mathbf{R}$ a la puissance du continu, il en est de même de $K_0$, donc $K_0$ s'obtient par adjonction à $\mathbf{Q}$ d'une famille d'éléments algébriquement indépendants ayant la puissance du continu. Comme on peut établir une correspondance biunivoque entre cette famille et la famille $(u_\alpha)$, on voit que les structures de corps (non topologique) de K et $K_0$ sont *isomorphes*. Comme $\mathbf{C}$ est une extension algébriquement fermée de K, le sous-corps $\Omega$ de $\mathbf{C}$ formé des éléments algébriques par rapport à K est algébriquement fermé, donc sa structure de corps est isomorphe à celle de $\mathbf{C}$. Il contient par suite un surcorps $K_1$ de K, dont la structure de corps est isomorphe à celle

([2]) Voir B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, 1, et E. STEINITZ, *Journal de Crelle*, 137, 1910, p. 167.

de **R**. Ainsi, il existe des sous-corps de **C** qui sont *connexes et localement connexes, partout denses*, et dont la structure de corps est *isomorphe à celle de* **R**. On peut encore exprimer ce résultat en disant qu'on peut munir le corps **R** d'une structure topologique *compatible* avec sa structure de corps, qui le rende connexe et localement connexe, mais non localement compact : le *complété* du corps topologique ainsi défini est un corps topologique isomorphe à **C**.

L'ensemble **C** étant identifié à l'ensemble produit $\mathbf{R}^2$, si l'on munit chacun des facteurs de ce produit de la topologie précédente et **C** du produit de ces deux topologies, **C** devient un corps topologique connexe et localement connexe, mais cette fois son complété n'est pas un corps, mais le produit de deux corps isomorphes à **C**, et munis de la topologie habituelle.

CALCUL SYMBOLIQUE. — *Sur les formules opératoires du calcul symbolique.* Note de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. Henri Villat.

Les formules opératoires usitées dans le calcul symbolique peuvent se classer en plusieurs groupes. Si l'on part de l'égalité symbolique fondamentale

$$f(t) \supset \varphi(p),$$

qui représente l'intégrale de Carson

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx,$$

les formules du *premier groupe* sont celles qui donnent l'image d'une fonction $f[h(t)]$, $h$ étant une nouvelle fonction de $t$. Ainsi la formule très connue qui donne l'image de $f(t^2)$, ou encore celles que nous avons récemment établies pour les images de $f(t^3)$, $f(e^t - 1)$, $f(sh t)$.

Dans le *second groupe* on rangera les formules donnant les originaux de fonctions telles que $\varphi[h(p)]$ : rappelons par exemple les formules très usitées relatives à $\varphi(\sqrt{p})$, $\varphi(1/p)$, $\varphi(\log p)$.

Nous appellerons formules du *troisième groupe* des formules, jusqu'ici peu ou point étudiées, qui, faisant jouer un rôle inverse aux fonctions $f$ et $\varphi$, chercheront à exprimer, au moyen de $f$, les images des fonctions $\varphi(t)$ ou $\varphi[h(t)]$. La plus simple de toutes est

$$\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{(p+x)^2},$$

qui se déduit immédiatement de la séquence connue

$$f(t) \supset \varphi(p), \qquad g(t) \supset f(p), \qquad \varphi(p) = p\int_0^\infty \frac{g(x)\,dx}{(p+x)^2}.$$

En divisant le premier membre de cette formule par $t$ et la multipliant

par $e^{it}$, puis séparant le réel et l'imaginaire, on obtient, après avoir fait sur le second membre les opérations que commande le calcul symbolique, les deux intéressantes formules

$$\frac{\cos t}{t}\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{p+x}{(p+x)^2+1} f(x)\,dx, \qquad \frac{\sin t}{t}\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{(p+x)^2+1}.$$

D'autres formules de ce groupe, sans doute nouvelles, peuvent être obtenues aisément par un procédé assez général dont voici un exemple simple : partons de la correspondance connue

$$\frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, e^{-2\sqrt{px}},$$

où $x$ est un paramètre quelconque. Multiplions les deux membres par $f(x)$ et intégrons par rapport à $x$ entre zéro et $\infty$ : le premier membre devient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} f(x)\,dx.$$

Mais de l'intégrale de Carson on tire, en remplaçant $p$ par $1/t$,

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}} f(x)\,dx,$$

d'où nous tirerons la formule cherchée

$$\sqrt{t}\,\varphi\left(\frac{1}{t}\right) \supset \sqrt{\pi p}\int_0^\infty e^{-2\sqrt{px}} f(x)\,dx.$$

On établira, par le même procédé, les formules suivantes, où s'introduisent respectivement la fonction complémentaire d'erreur et les fonctions eulériennes de seconde et de première espèce,

$$\frac{\varphi(t^2)}{t^2} \supset p\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^\infty e^{\frac{p^2}{4x}} \operatorname{erfc}\frac{p}{2\sqrt{x}}\,\frac{f(x)}{x}\,dx,$$

$$\frac{\varphi(-\log t)}{\log t} \supset -\int_0^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{p^x} f(x)\,dx,$$

$$\frac{\varphi[-\log(1-e^{-t})]}{\log(1-e^{-t})} \supset -p\int_0^\infty \mathrm{B}(p,\, x+1)\, f(x)\,dx.$$

ÉLECTRICITÉ. — *Sur une lampe déphaseuse et une nouvelle méthode d'analyse d'harmoniques.* Note de M. **Antoine Colombani**, transmise par M. Paul Langevin.

Le distorsion de phase en télévision est évitée en employant des penthodes à très faibles capacités parasites et dont la pente élevée permet des charges

d'anodes faibles. De plus, la contre-réaction conjuguée à un découplage énergique des circuits permet d'obtenir, pour chaque fréquence, sur une large bande, une tension de sortie en accord ou en opposition exacte de phase avec celle d'entrée.

Tenant compte de ces considérations, montons sur la résistance d'anode AB d'une penthode le pont CEFD, représenté sur la figure. La tension E entre C et D, en phase avec $E_0$ (au 1/1000 près avec des calculs de circuits convenables), est en opposition de phase avec la tension grille. Quels que soient R et C, un bon choix d'impédances permet de la considérer constante pour une tension grille donnée.

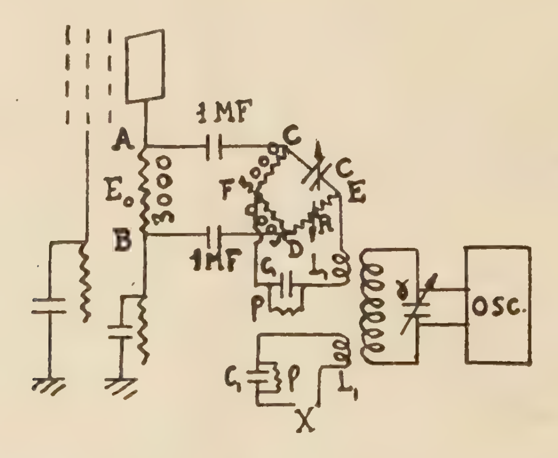
En calculant la tension U entre E et F, on trouve

$$U = \frac{E}{2}\left[\frac{R + \dfrac{j}{C\omega}}{R - \dfrac{j}{C\omega}}\right] \qquad \text{soit en module } |U| = \left|\frac{E}{2}\right|.$$

U est donc indépendant de C et R. Son déphasage $\psi$ sur E est tel que

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} 2\varphi \qquad \text{avec } \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{C\omega R} \qquad \text{soit } \operatorname{tang}\psi = \frac{2C\omega R}{C^2\omega^2 R^2 - 1}.$$

On dispose donc entre les points E et F d'une tension dont en peut faire varier indépendamment la grandeur $|E/2|$ et la phase $\psi$ de 0 à $\pi$ par rapport à E (par R et C). Aucune perturbation ne se traduit évidemment sur la grille de commande.




Parmi les nombreuses applications possibles de ce montage aux méthodes d'opposition, nous pouvons déjà signaler un principe original d'analyse d'harmoniques.

Entre E et F plaçons en série une self de résistance négligeable $L_1$ et un condensateur shunté ($C_1$, $\rho$). Avec $L_1 = C_1\rho^2$ la self est compensée quelle que soit la fréquence ($\rho = 4 \cdot 10^5\,\omega$, $C_1^2\omega^2\rho^2 \ll 1$).

Couplons $L_1$ faiblement, de la même manière que la tension X à analyser, à un circuit bouchon branché à un oscillographe et dont la fréquence est réglée automatiquement en même temps que celle de l'oscillatrice précédant la déphaseuse. Supposons-le réglé sur la fréquence $\omega$. Toutes les autres fréquences du spectre X à analyser sont étouffées et l'on observe sur l'écran la résultante de deux tensions induites de fréquence $\omega$ : l'une provenant de X, l'autre due à la déphaseuse. En agissant sur R ou C et sur la tension grille, on annule cette résultante par opposition de phase et de tension. D'où le zéro du déphaseur.

Si l'on continue l'exploration du spectre en augmentant la fréquence, on annule ensuite en tension et en phase l'harmonique $\omega'$. De la valeur de tang $\psi$ obtenue, on déduit le décalage de l'harmonique $\omega'$ sur le terme fondamental $\omega$.

Ainsi, de proche en proche, l'exploration du spectre sur une large bande de fréquences, permet de mesurer les fréquences, les amplitudes et les déphasages des différents termes par rapport au fondamental.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Les effets optiques du mouvement rectiligne et uniforme d'une source en théorie électromagnétique de la lumière.* Note [1] de M. **Émile Durand**.

Nous admettons que la source au « repos » est une charge unité en mouvement dont la trajectoire reste à l'intérieur d'un domaine spatial très petit; en prenant l'origine à l'intérieur de ce domaine, les coordonnées de la charge en fonction du temps sont $\zeta^u_{(x^4)}$ avec $x^4 = ct.$, $u = 1, 2, 3$; quand la source est en mouvement « rectiligne et uniforme », l'équation du mouvement de la charge est

$$\xi^u = \eta^u + \zeta^u, \qquad \text{avec } \eta^u = \beta^u x^4 + \text{const.}$$

On se propose de calculer le champ électromagnétique au point $P(x^u)$ et l'on pose

$$r^u = (x - \xi)^u, \qquad r = \sqrt{r^u_u}; \qquad \rho^u = (x - \eta)^u, \qquad \rho = \sqrt{\rho^u_u}.$$

Nous allons nous borner au calcul des potentiels $A^u$, $A^4$, les champs s'en déduisant par les formules habituelles; on a

$$r^p = |(x - \xi)^u_u|^{\frac{p}{2}} = \rho^p[1 + \rho^{-1}(\rho^{-1}\zeta^u_u - 2\alpha_u\zeta^u)]^{\frac{p}{2}} = \rho^p \sum_{q=0}^{\infty} C^q_{\left(\frac{p}{2}\right)} \rho^{-q}[\rho^{-1}\zeta^u_u - 2\alpha_u\zeta^u]^q,$$

avec $\alpha^u = \rho^{-1}\rho^u$; nous partirons de nos séries de potentiels [2] qui donnent

$$A^u = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{2^q q!} \sum_{l=0}^{l=q} a^q_{q-l}(-\partial_4)^l \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\partial_4)^n [\rho^n \Delta f_{(x^4)}] \right\}. \tag{1}$$

---

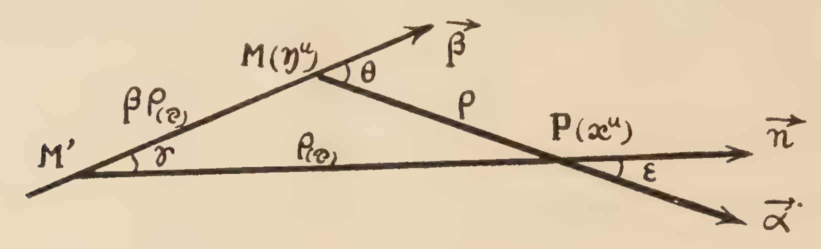
(1) Séance du 24 septembre 1945.

(2) *Comptes rendus*, **219**, 1944, pp. 510-513, et pp. 584-586.

où l'on a posé

$$f_{(x^4)} = (\rho\Delta)^{-1}\rho^{l-q}[\rho^{-1}\zeta^u_u - 2\alpha_u\zeta^u]\dot{\xi}^u, \qquad \Delta = 1 - \alpha_u\beta^u;$$

On a d'ailleurs $\dot{\xi}^u = \beta^u + \dot{\zeta}^u$; le potentiel scalaire $A^4$ s'obtient en remplaçant $\dot{\xi}^u$ par 1 dans la formule (1). D'après une étude que nous avons faite [3], la dernière somme sur la lettre $n$ est la fonction $f_{(\tau)}$ du temps retardé pour le mouvement de la source. Dans le cas du mouvement rectiligne la distance retardée $\rho_{(\tau)}$ se calcule aisément par voie géométrique (voir la figure).




L'équation du second degré

$$(1-\beta^2)\rho^2_{(\tau)} - 2\rho\beta\cos\theta\,\rho_{(\tau)} - \rho^2 = 0$$

donne

$$\rho_{(\tau)} = \rho\left[\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} - \beta\cos\theta\right]^{-1} = \rho b^{-1}. \tag{2}$$

Le temps retardé $\tau$ a donc pour expression

$$\tau = x^4 - \rho b^{-1}.$$

Toutes les grandeurs retardées s'expriment facilement en fonction des grandeurs actuelles; on a par exemple

$$\Delta^{-1}_{(\tau)} = [1 - \beta\cos\gamma]^{-1} = b^{-1}[1 - \beta^2\sin^2\theta]^{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{a}; \tag{3}$$

$$\alpha^u_{(\tau)} = b\,\alpha^u_{(x^4)} + \beta^u = n^u. \tag{4}$$

Quand $\zeta^u = 0$, il ne subsiste que $q = l = 0$ dans (1), et l'on retrouve la formule classique $A^u = (\rho\Delta)^{-1}_{(\tau)}\beta^u$ pour le mouvement rectiligne et uniforme d'une charge.

Cherchons maintenant ce qui se passe à grande distance de la source; on ne conserve que les termes en $\rho^{-1}$; (1), avec $l = q$, devient

$$A^u = \frac{1}{l!}\sum_{l=0}^{l=\infty}(\partial^4)^l\left[(\rho\Delta)^{-1}(\alpha_u\zeta^u)^l\dot{\xi}^u\right]_{(\tau)}. \tag{5}$$

Les fonctions $\tau$, $\Delta$, $\alpha$ des quatre variables $(x^u, x^4)$ peuvent se développer en série de Taylor; si l'on observe le champ au voisinage du point $x^u_0$ et au voisinage du temps $x^4_0$ on peut écrire

$$\tau = \tau_0 + (\partial_u\tau)_0(x^u - x^u_0) + (\partial_4\tau)_0(x^4 - x^4_0) = \mathfrak{a}(x^4 - n_u x^u) + \text{const.}; \tag{6}$$

---

[3] *Ibid.*, **221**, 1945, p. 349.

les autres termes du développement contiennent $\rho^{-1}$ et sont négligeables par rapport aux termes indépendants de $\rho$; de même on peut prendre $\rho\Delta = (\rho\Delta)_0$ et $\alpha = \alpha_0$ car les dérivées introduiraient des termes en $\rho^{-2}$; en négligeant les termes multipolaires d'ordre supérieur, (5) donne alors

$$(7) \qquad \begin{cases} A^u = \{ (\rho\Delta)^{-1} [ \beta^u + \dot{\zeta}^u + \Delta^{-1} \alpha_v \dot{\zeta}^v \beta^u ] \}_{(\tau)}, \\ A^4 = \{ (\rho\Delta)^{-1} [ 1 + \Delta^{-1} \alpha_v \dot{\zeta}^v ] \}_{(\tau)}; \end{cases}$$

les points désignent les dérivées prises par rapport à l'argument $\tau$; $v = 1, 2, 3$. Ces potentiels satisfont les relations $(\partial_u^u - \partial_4^4) A = 0$, et $\partial_u A^u + \partial_4 A^4 = 0$; les champs auront même phase $\tau$ que les potentiels; montrons qu'on y trouve le phénomène de l'aberration de la lumière et l'effet Doppler-Fizeau.

D'abord les $n^u$ sont des cosinus directeurs, car $n_u^u = 1$; de (6) on en déduit que la lumière continuera à se propager avec la vitesse $c$ malgré que la source soit animée de la vitesse $c\beta$; comme $n^u = \alpha_{(\tau)}^u$ la source est vue dans la position retardée; c'est le phénomène de l'aberration de la lumière; on a $\sin\varepsilon = \beta \sin\theta$ comme en relativité restreinte.

Supposons que le mouvement fin de la charge soit sinusoïdal du type $\zeta^u = \zeta_0^u \sin 2\pi\nu(_0/c) x^4$; on aura

$$(8) \qquad \dot{\zeta}_{(\tau)}^u = \frac{2\pi\nu_0}{c} \zeta_0^u \cos\left[\frac{2\pi\nu_0}{c} \mathfrak{a} (x^4 - n_u x^u) + \text{const.}\right].$$

La fréquence de l'onde plane est donc

$$(9) \qquad \nu' = \nu_0 (1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} b^{-1} = \nu_0 (1 - \beta\cos\gamma)^{-1};$$

en supposant que le mouvement fin est indépendant du mouvement rectiligne on aboutit donc à la formule classique.

Pour retrouver la formule relativiste $\nu' = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}/(1 - \beta\cos\gamma)$, il faut admettre que le mouvement fin de la source est influencé par le mouvement rectiligne de telle sorte que l'on ait

$$(10) \qquad \nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \qquad \text{soit } \zeta^u = \zeta_0^u \sin 2\pi \frac{\nu_0}{c} \sqrt{1 - \beta^2}\, x^4.$$

Du point de vue relativiste cette formule (10) est la conséquence du ralentissement des horloges. Elle assure d'ailleurs l'invariance de la phase $2\pi(\nu/c)\tau$, qui, sans cela, aurait la variance (4) du temps retardé.

PHYSICOCHIMIE. — *Diffusion dans les liquides. Obtention directe du réseau des courbes* $f(x, t, c) = 0$. Note [1] de M. **Édouard Calvet**, présentée par M. Charles Fabry.

J'ai indiqué [2] le principe d'une nouvelle méthode de mesure des coefficients de diffusion dans les liquides : les franges d'interférences obtenues par le pas-

---

[1] Séance du 7 mai 1945.

[2] *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 597.

sage de la lumière dans deux cuves voisines, dont l'une contient un liquide témoin homogène et l'autre le même liquide dans lequel un processus de diffusion a lieu, dessinent les *courbes concentration c-niveau $x$ d'un point de la cuve* à un instant $t$ de la diffusion. La photographie de ces franges et l'enregistrement photographique simultané de leur déplacement permettent la mesure de $(d^2c/dx^2)_t$ et de $(dc/dt)_x$. On en déduit le coefficient de diffusion D.

J'ai pu perfectionner cette méthode et obtenir directement sur un même cliché le réseau des courbes $f(x, t, c) = 0$.

Au lieu de couper horizontalement le tableau de franges par la fente de l'enregistreur, j'ai placé celle-ci *verticalement* (dans une direction parallèle à celle des franges avant la diffusion). On obtient alors une représentation graphique remarquable qui permet, avec un seul cliché, l'étude complète du phénomène.

En effet, considérons une frange $f$ à l'instant $t$ de la diffusion; son intersection M avec la fente de l'enregistreur est à la distance $d$ de la position initiale $f_0$ de cette frange avant la diffusion. La distance $d$ mesure, à un coefficient de proportionnalité $\rho$ près, la concentration $c$ qui est réalisée dans la cuve à l'instant $t$ et à l'abscisse $x$. Au cours du déplacement de la frange $f$, la distance $d = \rho c$ étant fixe, la courbe décrite sur le film photographique par le point M est donc une *courbe d'égales concentrations c*.

D'autre part deux franges voisines du tableau d'interférences sont écartées horizontalement de l'interfrange qui représente une variation constante $\varepsilon$ de la concentration. Il en résulte que les courbes enregistrées sont telles qu'en passant de l'une à la suivante la concentration varie de la quantité constante $\varepsilon$.

Finalement le cliché représente la projection de courbes de niveau (d'égales concentrations), équidistantes de $\varepsilon$ en concentration, sur le plan des $x$ et des $t$.

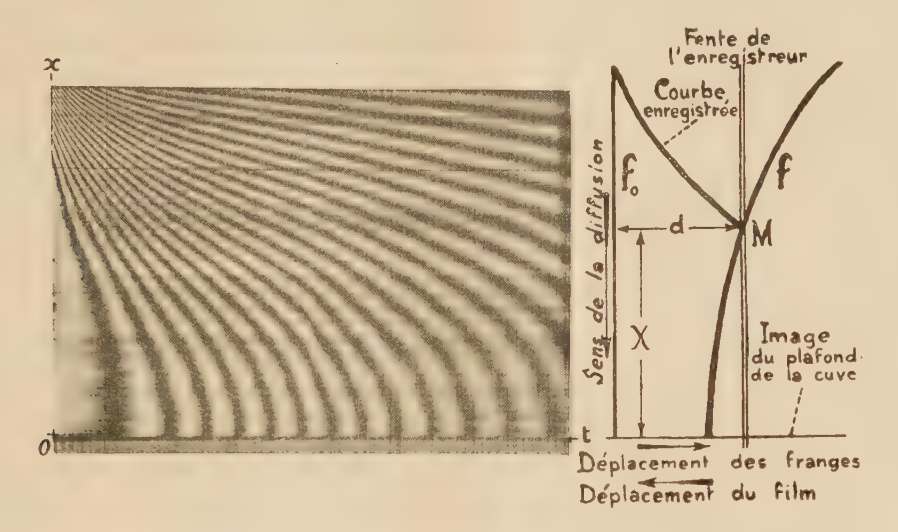
L'étude de $c = f(x)$ à un instant $t$ donné se fait comme je l'ai montré dans ma précédente Note en mesurant les intervalles successifs I obtenus en coupant verticalement le tableau enregistré par une droite d'équation $t = \text{const}$. L'étude de $c = f(t)$, pour une abscisse $x$ donnée, se fait de manière analogue en mesurant les intervalles I′ qui séparent horizontalement deux courbes d'égale concentration.

*Exemple de mesure. Coefficients de diffusion de l'urée et du phénol dans l'eau.* — Dans nos expériences la diffusion a lieu de bas en haut jusqu'à un plafond horizontal fermant la cuve. Nous avons opéré dans une salle à température constante de 16°.

Le cliché ci-après représente le début d'un enregistrement (diffusion de l'urée dans l'eau). Il rend compte de tous les détails du phénomène. Il permet la détermination d'un grand nombre de valeurs du coefficient de diffusion D.

On a réalisé plusieurs coupures du cliché parallèles à l'axe des X et l'on a déterminé à l'aide du comparateur les intervalles I. On a tracé les courbes $I = f(X)$, puis $1/I = f(X)$. On en a déduit la pente $a$ des tangentes à ces dernières.

De même on a réalisé des coupures parallèles à l'axe des $t$ et l'on a déterminé au comparateur les intervalles I'. On a tracé les courbes $I' = f(t)$ qui per-




mettent alors de mieux évaluer I'. Le coefficient de diffusion D est donné par

$$D = \frac{v}{G^2} \times \frac{1}{I'a}.$$

$v$ étant la vitesse de déplacement du film en cm/jour et G le grandissement.

*Résultats*. — Les premières mesures ont été effectuées avec le phénol et l'urée diffusant dans l'eau. Elles montrent que :

1° D est sensiblement constant pour les faibles valeurs de $c$ et de $dc/dx$. Jusqu'à $c = 0{,}003$ et $dc/dx = 3/1000$ par centimètre, on trouve, pour le phénol, $D = 0{,}70$ et, pour l'urée, $D = 0{,}85$.

2° D dépend de $c$ et du gradient de $c$. Nous avons constaté une augmentation de la valeur de D avec le gradient de $c$ dans le cas de l'urée et au contraire une diminution dans le cas du phénol. Une étude plus complète de ces variations est en cours.

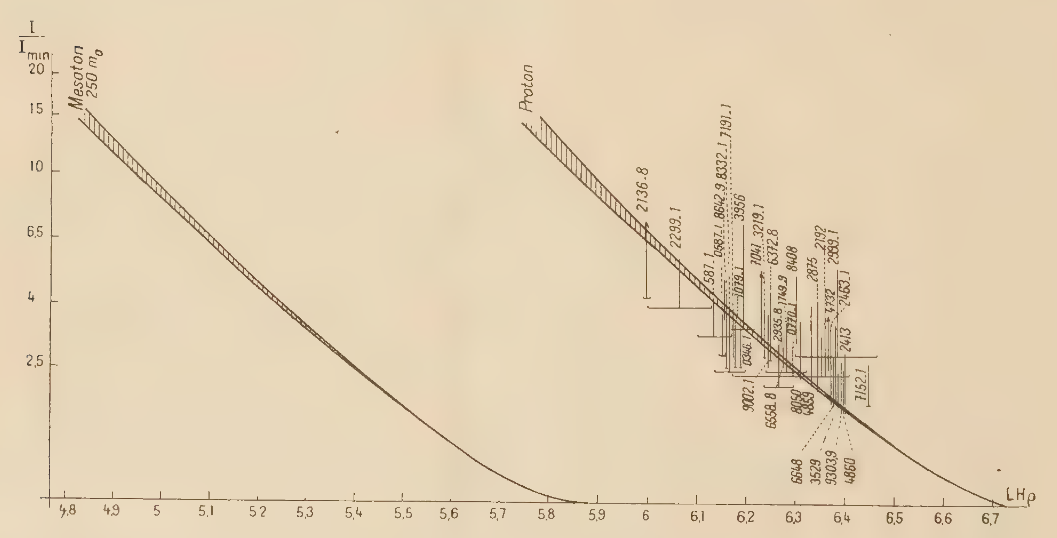
3° Influence du plafond de la cuve : les tangentes aux franges sur le plafond de la cuve ne sont verticales qu'au début et à la fin de la diffusion. Nous avons observé ce fait dans toutes les expériences que nous avons réalisées : pendant la plus grande partie de la diffusion il y a dissymétrie de l'onde incidente de diffusion et de l'onde réfléchie sur le plafond; le principe dit « de réflexion » n'est pas vérifié.

Nous signalons enfin que notre méthode est applicable à l'étude de la conductibilité thermique des liquides.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Observation des protons de grande énergie dans la partie pénétrante du rayonnement cosmique.* Note [1] de MM. **Louis Leprince-Ringuet**, **Michel Lhéritier** et **Robert Richard-Foy**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Nous avons obtenu à Largentière (1000$^{m}$ d'altitude), avec la grande chambre de Wilson de 75$^{cm}$ commandée par compteurs, plusieurs milliers de trajectoires verticales de particules du rayonnement cosmique, traversant toute la chambre et filtrées en général par 12$^{cm}$ de plomb. Elles sont dues aux mésotons du groupe dur et présentent une ionisation voisine du minimum.

En les examinant nous avons constaté que, pour un très petit nombre d'entre elles, l'ionisation était nettement supérieure au minimum et nous avons pu estimer grossièrement sa valeur par la proximité des grains et l'aspect plus ou moins continu du rayon. Il s'est trouvé que toutes les trajectoires dont l'ionisation est nettement supérieure au minimum




Les deux zones hachurées comprises entre chacun des groupes de courbes donnent les limites de l'évaluation théorique de l'ionisation en fonction de Log Hρ. Chaque trait vertical correspond à l'estimation des limites de l'ionisation d'une particule, repérée par le numéro du cliché. Les traits surmontés d'une flèche indiquent que l'estimation porte seulement sur le minimum. Les traits horizontaux donnent les limites de Log Hρ dans le cas des mesures les moins précises.

correspondent à des particules de grande énergie chargées positivement, en supposant leur déplacement de haut en bas. En utilisant les courbes tirées de la formule de Bloch, qui donnent, pour les diverses masses, l'ioni-

(1) Séance du 4 juin 1945

sation en fonction du produit $H\rho$ du champ magnétique par le rayon de courbure, nous avons obtenu les résultats représentés ci-dessus : on voit que toutes ces particules s'identifient bien à des protons, observés dans une région où leur moment réduit $P = pc/M_0c^2 < 0,65$ ($p$, quantité de mouvement). Nous n'avons trouvé aucune particule négative, ce qui confirme le bien-fondé de la méthode. Sur environ 7000 rayons mesurés, nous avons trouvé 35 protons de grande énergie.

Il ne s'agit pas ici des protons lents, en général proches de leur fin de parcours et produisant une ionisation beaucoup plus élevée, que l'on observe fréquemment, éjectés dans les directions les plus diverses : les protons dont nous indiquons ici les proportions apparaissent dans les mêmes conditions que les mésotons de grande énergie du groupe dur. Ils en diffèrent seulement par une ionisation un peu plus élevée. Si nous comparons le nombre de ces protons au nombre de mésotons observés dans la même région du spectre d'impulsion, nous trouvons que leur proportion est de l'ordre de 2,5 à 3 %. Pour les impulsions supérieures à 700 millions d'électron-volts, il n'est plus possible de distinguer un proton d'un mésoton. Si nous supposons, par extrapolation, que la proportion des protons dans la totalité du groupe dur est la même que dans la zone où la discrimination est possible, nous obtenons donc une proportion totale de protons de grande énergie de l'ordre de 2,5 à 3 %. Ces protons sont responsables, tout au moins en partie, de l'excès des particules positives trouvé dans le spectre du rayonnement cosmique.

D'autre part, ces résultats indiquent une proportion de protons très supérieure à celle des protons primaires, qui, selon la théorie de Heitler, Hamilton et Peng ([2]), sont capables d'atteindre les basses couches de l'atmosphère.

Une confirmation de notre méthode nous a été donnée par l'examen de deux trajectoires obtenues au niveau de la mer avec une chambre de Wilson contenant un écran de plomb horizontal; l'une d'elles, reconnue comme un proton par l'estimation de son ionisation et la mesure de sa courbure, possède l'énergie cinétique de 50 MeV ($300\ H\rho = 300$ MeV), qui ne lui permet pas de traverser l'écran de $17^{mm}$ de plomb; l'autre, identifiée de même à un proton ($300\ H\rho = 600$ MeV), perd l'énergie cinétique de 75MeV au passage de l'écran, ce qui correspond bien à l'ionisation estimée.

---

([2]) *Phys. Rev.*, **64**, 1943, p. 78.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Expressions générales de la pression osmotique; pression osmotique des solutions colloïdales et coacervation.* Note de M. **Guy Emschwiller**, transmise par M. Paul Langevin.

On ne connaît d'autre théorie satisfaisante de la pression osmotique que celle qui l'assimile à la surpression hydrostatique tendant à chasser de la solution, à travers la paroi semiperméable, autant de solvant que la tendance à égalisation de son énergie libre en ferait entrer. On relie ainsi directement la valeur de la pression osmotique à la variation d'énergie libre du solvant

$$P = -\frac{\Delta F}{\bar{v}},$$

où P est la pression osmotique, $\Delta F$ la variation d'énergie libre molaire du solvant quand il passe de l'extérieur dans la solution, $\bar{v}$ le volume molaire partiel du solvant dans la solution.

Dans le cas où le solvant est constitué par un liquide pur, la relation devient

$$P = -\frac{RT}{\bar{v}} \ln a$$

ou, pour une solution idéale

$$P = -\frac{RT}{\bar{v}} \ln x,$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue, $x$ la fraction molaire du solvant dans la solution, $a$ son activité, le liquide pur étant pris comme état de référence. On sait que les solutions suffisamment étendues peuvent être considérées comme idéales; si l'on identifie alors le volume partiel du solvant et le volume total de la solution, si l'on ne prend d'autre part que le premier terme du développement en série de $\ln(1 - x_D)$, $x_D$ étant la fraction molaire du ou des corps dissous, on retrouve la loi de van't Hoff sous sa forme classique

$$P = RTc,$$

où $c$ est la concentration molaire, rapportée à l'unité de volume de la solution, du corps ou de l'ensemble de corps dissous.

Dans le cas le plus général d'un nombre quelconque de corps dissous dans un solvant renfermant un nombre quelconque de constituants, la pression osmotique est donnée par la relation

$$P = -\frac{RT}{\bar{v}} \ln \left[ \left(\frac{a_1}{a'_1}\right)^{x_1} \left(\frac{a_2}{a'_2}\right)^{x_2} \cdots \left(\frac{a_i}{a'_i}\right)^{x_i} \cdots \right],$$

où $x_i$ est la fraction molaire du $i^{\text{ième}}$ constituant dans le mélange solvant, $a_i$ son activité dans la solution et $a'_i$ dans le solvant. On retrouve ici encore en solution suffisamment étendue la loi de van't Hoff, car il est permis d'admettre qu'alors

l'un quelconque des constituants a mêmes coefficients d'activité dans le solvant et dans la solution.

Cette conception de la pression osmotique des solutions dans des mélanges solvants présente un intérêt pratique, car on a parfois déterminé dans ces conditions la pression osmotique des solutions colloïdales. Mais on peut se heurter ici à cette difficulté que, par suite de phénomènes de combinaison ou d'adsorption sélectives, le liquide extraparticulaire n'ait plus la même composition que le solvant initial. Si donc, pour mesurer la pression osmotique, on oppose à la solution étudiée le solvant initial, des échanges se produiront jusqu'à égalisation de la composition des solvants. Il y aura variation tout à la fois de la composition du solvant extraparticulaire et du solvant extérieur [1], et l'état final du système, donc la pression osmotique, dépendront des volumes relatifs mis en œuvre. Il est clair qu'on ne peut mesurer de pression osmotique exacte de la solution qu'en lui opposant un solvant ayant la composition du liquide extraparticulaire. Pratiquement le mieux doit être de déterminer cette composition en recherchant précisément quel solvant il faut opposer à la solution pour que les compositions demeurent inchangées.

Il y a intérêt à interpréter les résultats concernant la pression osmotique des solutions colloïdales conformément aux conceptions qui précèdent. Le fait expérimental important est que les colloïdes dits linéaires ne suivent approximativement la loi de van't Hoff que pour des dilutions beaucoup plus grandes que dans le cas des autres solutions [2]. On doit à G. V. Schulz [3] d'avoir montré qu'aux faibles dilutions usuelles les solutions des colloïdes linéaires, si elles sont éloignées de l'état idéal, se comportent néanmoins comme des solutions régulières, au sens que Hildebrand a donné à ce terme, c'est-à-dire que les constituants ont mêmes entropies que dans le cas idéal; Schulz a ainsi relié l'augmentation de la pression osmotique à la seule existence d'une chaleur positive de mélange.

Mais on peut rendre compte de l'ensemble des variations observées, que les solutions soient régulières ou non. Il résulte en effet approximativement de ce qui a été rappelé plus haut que la pression osmotique est supérieure ou inférieure à celle qu'on calcule dans le cas idéal, selon que l'énergie libre de mélange du solvant est supérieure ou inférieure à l'énergie libre de mélange dans le cas idéal; or ces variations d'énergies libres de mélange sont en liaison avec les valeurs relatives des forces intermoléculaires dans la solution et dans le solvant. On justifie ainsi le résultat établi expérimentalement par

---

(1) De telles variations de composition ont été effectivement observées (A. Dobry, *J. Chim. phys.*, **32**, 1935, p. 52).

(2) A. Dobry et H. Staudinger et collaborateurs, dans Hermann Staudinger, *Organische Kolloidchemie*, Braunschweig 1941, p. 178.

(3) *Zeits. Elektrochem.*, **45**, 1939, p. 652.

A. Dobry que la pression osmotique varie dans le même sens que le *pouvoir solvant*, les *mauvais solvants* conduisant aux pressions osmotiques les plus faibles. Les pressions osmotiques peuvent même aller jusqu'à s'annuler [4]; il y a alors équilibre entre le solvant et la solution, qui cessent ainsi d'être miscibles; c'est le phénomène dit de coacervation. La coacervation ne constitue de la sorte qu'un aspect particulier du phénomène général de la démixtion et n'a rien en soi d'exceptionnel; ce sont les conditions mêmes de structure des colloïdes linéaires qui communiquent aux coacervats leurs propriétés si spéciales.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur une synthèse nouvelle de l'acide phénylpyruvique.* Note de MM. **Henri Moureu**, **Paul Chovin** et **Michel Garein**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'un de nous a précédemment démontré que l'on pouvait, par une suite de réactions simples, obtenir le phénylbenzylglyoxal en partant de la benzalacétophénone [1]. Il suffit de traiter la cétone éthylénique α-bromée correspondante par la pipéridine et d'hydrolyser les composés d'addition mono- ou dipipéridinés formés intermédiairement. On réalise ainsi en définitive la transformation

$$C^6H^5-CH=CH-CO-C^6H^5 \rightarrow C^6H^5-CH=C(OH)-CO-C^6H^5 \rightarrow C^6H^5-CH^2-CO-CO-C^6H^5.$$

Étendue à un grand nombre de cétones α-β-éthyléniques, la réaction s'est montrée très générale et a conduit à une méthode inédite de préparation des dicétones α [2].

Il nous a paru intéressant de rechercher si le carbonyle carboxylique d'un acide α-β-éthylénique orienterait la réaction de la même manière que le carbonyle cétonique d'une cétone α-β-éthylénique. L'expérience montre qu'il en est bien ainsi et il nous a été permis de réaliser, par des réactions très nettes, utilisant également la pipéridine, le passage de l'acide cinnamique à l'acide phénylpyruvique :

$$C^6H^5-CH=CH-CO\,OH \rightarrow C^6H^5-CH=C(OH)-CO\,OH \rightarrow C^6H^5-CH^2-CO-CO\,OH.$$

Voici quelques précisions sur le mécanisme des réactions intermédiaires :

*a. Les esters cinnamiques α-bromés.* — Les deux esters cinnamiques α-bromés *cis* et *trans* sont connus, mais il a été trouvé un mode de préparation permettant d'obtenir soit l'isomère ordinaire, soit l'isomère allo : il suffit de traiter une molécule de cinnamate de méthyle dibromé par une molécule, soit d'éthylate de sodium, soit de pipéridine et de purifier par plusieurs rectifications sous vide l'ester α-bromé brut formé.

---

[4] A. Dobry, *J. Chim. phys.*, 36, 1939, p. 102.

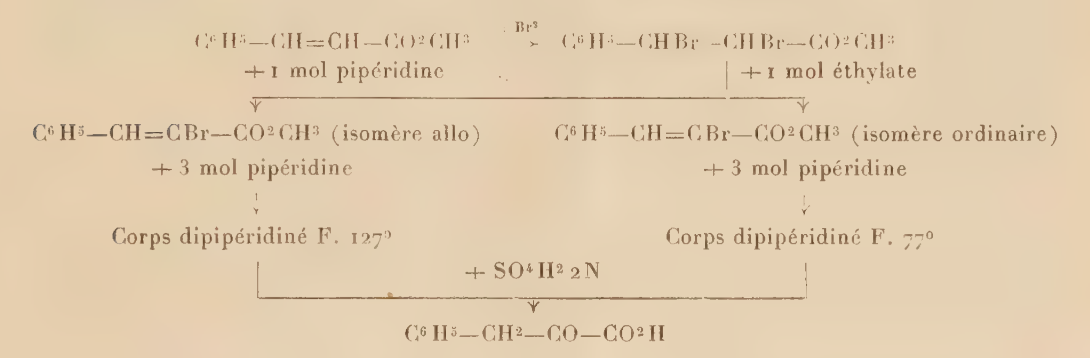
[1] Ch. Dufraisse et H. Moureu, *Bull. Soc. Chim.*, [4], 41, 1927, p. 457.

[2] Ch. Dufraisse et H. Moureu, *Bull. Soc. Chim.*, [4], 41, 1927, p. 1370.

*b. Les composés dipipéridinés intermédiaires.* — En traitant par la pipéridine les cinnamates de méthyle α-bromés ordinaire et allo, il n'a pas été possible d'isoler des composés d'addition intermédiaires analogues à ceux que Ch. Dufraisse et H. Moureu avaient pu mettre en évidence avec les cétones α-β-éthyléniques. Seuls se forment deux composés d'addition dipipéridinés isomères, l'un fondant à 77°, lorsqu'on traite le cinnamate de méthyle α-bromé ordinaire par trois molécules de pipéridine, l'autre fondant à 127°, lorsqu'on s'adresse dans les mêmes conditions à l'isomère allo.

*c. Hydrolyse en acide phénylpyruvique.* — Chacun des deux esters dipipéridinés isomères, chauffé plusieurs heures à l'ébullition avec de l'acide sulfurique 2N, subit une hydrolyse profonde qui remplace non seulement chacun des groupes dipipéridinés par un oxhydryle, mais encore fait sauter le groupe méthylique terminal. Finalement, dans les deux cas, on aboutit à l'acide phénylpyruvique $C^6H^5-CH^2-CO-CO^2H$ avec un rendement supérieur à 50 %, compté en acide purifié par recristallisation dans le benzène.

L'ensemble des transformations est résumé dans le tableau suivant :




*d. Structure des composés dipipéridinés.* — L'existence de deux isomères dipipéridinés permet de penser qu'on a affaire aux deux diastéréoisomères α-β répondant à la formule $C^6H^5-CH(NC^5H^{10})-CH(NC^5H^{10})-CO^2CH^3$. Un autre argument en faveur de cette hypothèse est qu'il a été possible de mettre en évidence, dans les eaux mères de l'hydrolyse des deux composés dipipéridinés, la présence de composés carboxylés et α-β-dihydroxylés, qui doivent être les acides phénylglycériques correspondants $C^6H^5-CHOH-CHOH-CO^2H$. Il n'est cependant pas possible d'affirmer que les acides phénylglycériques en question sont les intermédiaires obligés conduisant à l'acide phénylpyruvique. Ils pourraient n'être que des produits secondaires, ce qui, d'ailleurs, n'infirme pas l'hypothèse ci-dessus.

*e. Analogies réactionnelles entre les cétones α-β-éthyléniques et les acides α-β-éthyléniques.* — Il est intéressant de souligner ici qu'il est également possible de transformer l'acide cinnamique en acide benzoylacétique $C^6H^5-CO-CH^2-CO^2H$, isomère de position de l'acide phénylpyruvique, en utilisant, cette fois-ci, l'éthylate de sodium comme réactif d'addition ([3]). Si l'on se souvient maintenant que l'action de l'éthylate de sodium, appliquée à une cétone α-β-éthylénique telle que la benzalacétophénone $C^6H^5-CH=CH-CO-C^6H^5$, conduit à une dicétone-β, le dibenzoylméthane $C^6H^5-CO-CH^2-CO-C^6H^5$ ([4]), on voit, en définitive, que, compte tenu de certaines particularités observables dans la formation des corps intermédiaires, il existe un

([3]) V. L. Leighton, *J. Am. Chem. Soc.*, 20, 1898, p. 133.

([4]) Ch. Dufraisse et P. Gérald, *Bull. Soc. Chim.*, [4], 31, 1922, p. 1285.

parallélisme complet dans le comportement des acides α-β-éthyléniques et des cétones α-β-éthyléniques vis-à-vis des réactifs tels que la pipéridine et l'éthylate de sodium. Le premier conduit à des corps α-cétoniques, le second à des composés β-cétoniques.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques dérivés de l'hydroxy-3 pipéridine.* Note de M. **Raymond Paul**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'époxy-1.2 chloro-5 pentane fixe, à 100°, exactement une molécule de diéthylamine en donnant un solide cristallin incolore, qui est vraisemblablement le chloroéthylate d'éthyl-1 hydroxy-3 pipéridine. Ce composé est en effet entièrement soluble dans l'eau et, lorsque l'on sature par l'hydroxyde de potassium sa solution aqueuse, il ne se sépare aucune couche insoluble. Par contre, en chauffant à l'ébullition la solution ainsi obtenue, il se dégage de l'éthylène, en même temps qu'il se sépare un liquide huileux dont la composition et les propriétés sont en bon accord avec celles de l'*éthyl-1 hydroxy-3 pipéridine* :

$$Cl-(CH^2)^3-\underbrace{CH-CH^2}_{O} + HN(C^2H^5)^2 \rightarrow Cl-(CH^2)^3-CHOH-CH^2-N(C^2H^5)^2$$

$$\rightarrow \underbrace{CH^2-CH^2-CH^2-CHOH-CH^2-N}\begin{matrix}(C^2H^5)^2\\ Cl\end{matrix},$$

$$\underbrace{CH^2-CH^2-CH^2-CHOH-CH^2-N}\begin{matrix}(C^2H^5)^2\\ Cl\end{matrix} + HOK$$

$$\rightarrow ClK + H^2O + H^2C{=}CH^2 + \underbrace{CH^2-CH^2-CH^2-CHOH-CH^2-N}-C^2H^5$$

L'éthyl-1 hydroxy-3 pipéridine n'avait pas encore été décrite jusqu'ici; c'est un liquide incolore d'odeur vireuse, mais nullement désagréable et qui bout à 97°-98° sous 21$^{mm}$ ($D_{15}^{23}$ 0,966, $N_D^{23}$ 1,47427). Le rendement, compté à partir de l'époxychloropentane, est de 77 %.

Il n'a pas été possible d'isoler le diéthylamino-1 chloro-5 pentanol-2 qui doit prendre naissance dans la réaction. Ceci n'est pas surprenant, étant donné l'instabilité bien connue des amines δ-halogénées, et d'ailleurs l'essai suivant montre que le mécanisme que nous venons de proposer est très vraisemblable.

A la solution acétique d'une molécule de diéthyl-N-tétrahydrofurfurylamine, on fait absorber exactement 2$^{mol}$ de gaz bromhydrique sec, et l'on chauffe le tout durant quelques heures à 100° pour ouvrir l'hétérocycle :

$$\underbrace{CH^2-CH^2-CH^2-CH}_{O}-CH^2-N(C^2H^5)^2 + 2BrH \rightarrow Br-(CH^2)^2-CHOH-CH^2-N(C^2H^5)^2-BrH.$$

Le produit de la réaction est entièrement soluble dans l'eau et, en neutralisant avec précaution sa solution avec de l'ammoniaque, il se précipite une huile dense, que l'on sépare rapidement de la couche aqueuse. Cette huile s'échauffe spontanément au bout de quelques minutes en se transformant en une masse translucide, très soluble dans l'eau qui, sans aucun doute, est le *bromoéthylate d'éthyle-1 hydroxy-3 pipéridine*

$$Br-(CH^2)^3-CHOH-CH^2-N(C^2H^5)^2 \rightarrow \underbrace{CH^2-CH^2-CH^2-CHOH-CH^2-N}\begin{matrix}(C^2H^5)^2\\ Br\end{matrix}.$$

En chauffant en effet, à l'ébullition, sa solution aqueuse saturée de potasse, on obtient, comme dans le cas précédent, un dégagement d'éthylène et l'on recueille, avec un rendement de 74 % (compté à partir de la tétrahydrofurfurylamine) l'éthyl-1 hydroxy-3 pipéridine, dont les constantes sont identiques à celles du produit obtenu à partir de l'époxychloropentane.

Ce même aminoalcool a été obtenu d'une façon plus directe en chauffant à 100° un mélange équimoléculaire d'époxy-1.2 chloro-5 pentane et de monoéthylamine :

$$Cl{-}(CH^2)^3{-}\underbrace{CH{-}{-}CH^2}_{O} + H^2N{-}C^2H^5 \rightarrow Cl{-}(CH^2)^3{-}CHOH{-}CH^2{-}NH{-}C^2H^5$$

$$\rightarrow \underline{CH^2{-}CH^2{-}CH^2{-}CHOH{-}CH^2{-}N}{-}C^2H^5.ClH.$$

Il suffit alors de saturer de potasse ou de soude la solution du produit de la réaction pour en séparer l'éthylhydroxypipéridine (rendement 74 %). Traitée par le chlorure de benzoyle en milieu benzénique, l'éthyl-1 hydroxy-3 pipéridine donne le chlorhydrate de son ester benzoïque, sous forme d'aiguilles incolores, fusibles à 204° et possédant des propriétés anesthésiques très marquées

En chauffant à 150° l'éthylhydroxypipéridine avec un excès d'acide chlorhydrique concentré ou bien en la traitant par la quantité calculée de chlorure de thionyle à 100°-120°, on obtient l'*éthyl-1 chloro-3 pipéridine*

$$\underline{CH^2{-}CH^2{-}CH^2{-}CHCl{-}CH^2{-}N}{-}C^2H^5,$$

liquide incolore, à odeur de moisi, bouillant à 75° sous 20$^{mm}$ ($D_{15}^{19,5}$ 0,996; $E_D^{19,5}$ 1,46807). Son picrate fond à 156°-157° et son iodométhylate vers 210°.

Cette formation exclusive du cycle pipéridinique dans une molécule capable d'engendrer également un cycle tétrahydrofurannique dont la formation est si aisée, nous a paru digne d'être signalée. Nous avons obtenu, de la même façon, le *phényl-1 hydroxy-3 pipéridine*

$$\underline{CH^2{-}CH^2{-}CH^2{-}CHOH{-}CH^2{-}N}{-}C^6H^5,$$

liquide incolore, bouillant à 176° sous 16$^{mm}$ ($D_{15}^{15}$ 1,099; $N_D^{15}$ 1,57856), en chauffant à 120° un mélange équimoléculaire d'aniline et d'époxy-1.2 chloro-5 pentane.

Dans cette réaction non plus, nous n'avons pu mettre en évidence la formation d'un cycle tétrahydrofurannique qui aurait conduit à la phényl-N-tétrahydrofurfurylamine; cette amine, qui bout à 155°-156°, sous 10$^{mm}$ ($D_{15}^{11}$ 1,075; $N_D^{11}$ 1,56456), a été d'ailleurs obtenue sans difficulté par action du chlorure de tétrahydrofurfuryle sur l'aniline vers 150°.

Cependant la formation du cycle pipéridinique, de préférence au cycle tétrahydrofurfurannique, ne peut être considérée comme une règle absolument

générale, car la monoéthylaniline chauffée durant 12 heures à 125° avec l'époxy-1.2 chloro-5 pentane ne nous a pas donné le chloroéthylate de phényl-1 hydroxy-3 pipéridine comme nous l'espérions, mais seulement le *tétrahydrofurfuryl*-N-*éthyl*-N-*aniline*

$$\mathrm{Cl{-}(CH^2)^3{-}\underset{\diagdown O \diagup}{CH{-}CH^2}} + \mathrm{HN}{<}\begin{matrix}\mathrm{C^6H^5}\\ \mathrm{C^2H^5}\end{matrix} \rightarrow \mathrm{Cl{-}(CH^2)^3{-}CHOH{-}CH^2{-}N}{<}\begin{matrix}\mathrm{C^6H^5}\\ \mathrm{C^2H^5}\end{matrix}$$

$$\rightarrow \mathrm{\underbrace{CH^2{-}CH^2{-}CH^2{-}CH}_{O}{-}CH^2{-}N}{<}\begin{matrix}\mathrm{C^6H^5}\\ \mathrm{C^2H^5}\end{matrix} + \mathrm{ClH}.$$

Cette amine, qui bout à 176-177°, sous 20$^{mm}$ ($D_{15}^{22}$ 1,052; $N_D^{22}$ 1,55 962) s'est révélée identique au produit obtenu par action directe de l'éthylaniline sur le chlorure de tétrahydrofurfuryle.

CRISTALLOGRAPHIE. — *Mise en évidence par micrographie et par rayons X des imperfections de structure des gros cristaux métalliques.* Note de MM. **Paul Lacombe** et **Louis Beaujard**, présentée par M. Albert Portevin.

On sait que les gros cristaux métalliques préparés *à partir de l'état liquide* présentent des imperfections de structure et d'orientation dues à leur croissance dendritique [1]. Dans ce travail, nous avons pu montrer, à la fois par micrographie et par rayons X, que les gros cristaux d'aluminium, préparés *à partir de l'état solide* par la méthode de l'écrouissage critique [2], présentaient également des défauts de structure.

L'attaque micrographique par le réactif aux trois acides $NO^3H$, HCl, $H^2F^2$, d'un monocristal poli électrolytiquement fait apparaître, en dehors des figures de corrosion réparties absolument au hasard, des alignements de points d'attaque, disposés d'une part le long des joints de grains de la cristallisation actuelle et d'autre part à l'intérieur des limites d'un même monocristal. De plus on retrouve rigoureusement le même réseau d'alignements au cours de polissages et d'attaques micrographiques successives d'un même échantillon. Enfin les recto et verso d'un même monocristal reproduisent exactement le même réseau de figures de corrosion alignées (*fig.* 1 et 2). Ces alignements ne correspondent donc pas à de simples discontinuités superficielles du monocristal, telles que des microfissures ou des alignements d'impuretés, mais sont en réalité les traces de surfaces de séparation, existant dans toute l'épaisseur du cristal unique.

Ces discontinuités de structure des monocristaux ne peuvent être observées que sur des surfaces polies électrolytiquement et attaquées par un réactif convenable. Notre formule précédente [3], au cours d'une attaque prolongée, multiplie rapidement les figures de

---

[1] P. W. Bridgman, *Proc. Amer. Acad. Sci.*, **60**, 1924, p. 305.
[2] Carpenter et Elam, *Proc. Roy. Soc.*, A, **100**, 1921, p. 329.
[3] P. Lacombe et L. Beaujard, *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 66.

corrosion, masquant ainsi toute répartition régulière de celles-ci. Nons préconisons le réactif suivant, utilisé à température inférieure à 10°, $NO^3H$ fumant 47 %, ClH pur 50 %, $F_2H^2$ pur 3 %.

On pouvait se demander à priori, d'après l'allure polyédrique des alignements, s'il ne s'agissait pas d'anciens contours de grains de la cristallisation primaire dont on retrouverait la trace après croissance des gros



Fig. 1 et 2. — Similitude du réseau des figures de corrosion sur les *recto* et *verso* d'un même monocristal d'aluminium. G. = 100.
(Réduction au 1/2.)

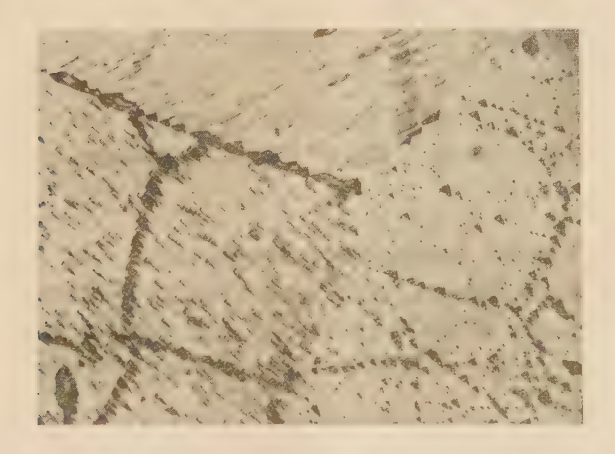


Fig. 3. — Alignements observés sur 3 cristaux accolés limités strictement aux contours des grains actuels. G. = 300.
(Réduction au 1/2.)

cristaux. Cette hypothèse ne peut être retenue pour deux raisons. En premier lieu l'examen de plusieurs gros cristaux voisins montre que les

alignements sont toujours limités aux contours des grains actuels et ne se prolongent pas d'un cristal à l'autre (*fig.* 3). En second lieu, le souvenir d'une cristallisation antérieure du métal devrait rester immuable quelles que soient la durée et la modalité des traitements thermiques subis postérieurement par les gros cristaux. En fait un nouveau chauffage d'un cristal unique provoque une modification complète du réseau d'alignements, comme si l'individu cristallin subissait une réorganisation complète de structure.

Nous pensons donc qu'il s'agit de véritables discontinuités de structure du monocristal, telles que des contours *intracristallins* limitant des petits blocs d'orientation très légèrement différente dont l'assemblage constitue le monocristal. Nous avons pu confirmer cette hypothèse en explorant la surface d'un monocristal par un très fin pinceau de rayons X (collimateur de 3/10 de millimètre) émis par une anticathode de tungstène. L'examen des taches de Laüe obtenues pour les grands angles de diffraction (diagramme par réflexion) permet alors de faire des mesures d'orientation cristalline à quelques minutes près. Nous avons pu observer ainsi à la surface d'un même monocristal, tel qu'il est défini par l'attaque macrographique, des différences d'orientation allant de quelques minutes à 2 ou 3° pour l'aluminium raffiné étudié. Il nous reste à préciser ultérieurement la modalité des mesures précises d'orientation.

Cette observation d'imperfections de structure des gros cristaux à l'échelle microscopique est à rapprocher des études de M. Buerger [4] sur la *lineage structure*. Il n'est pas exclu de penser également que cette structure présente une relation et des analogies, à l'échelle près, avec la structure dite mosaïque.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'hydrolyse chimique de l'acide inositohexaphosphorique.* Note de M. **Paul Fleury**, présentée par M. Maurice Javillier.

On sait que l'acide inositohexaphosphorique, en solution aqueuse, s'hydrolyse très difficilement. Son hydrolyse pratiquement complète n'a pu être obtenue jusqu'ici qu'en utilisant des milieux très riches en acide (par exemple 40 à 50$^{g}$ d'acide sulfurique pour 100$^{cm^3}$ à l'ébullition pendant 8 heures).

La stabilité de cet ester se rapproche donc de celle des acides glycérophosphoriques. Or on sait maintenant [1] que la vitesse d'hydrolyse de ces composés est fonction du pH du milieu et présente un optimum très

---

[4] *Zeits. f. Kristall.*, 89, 1934, p. 195.

[1] M.-C. Bailly, *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1902.

net à pH = 4,7. Nous nous sommes demandé si cette observation n'était pas généralisable à d'autres esters phosphoriques et en particulier à l'acide inositohexaphosphorique.

Nous avons utilisé l'inositohexaphosphate de sodium à 35 $H^2O$. Les solutions, dont la concentration finale était de 2 %, sont amenées au pH voulu par addition d'une quantité convenable d'acide sulfurique dilué, et chauffées ensuite à + 120° pendant un temps déterminé. On dose alors l'acide phosphorique libéré.

1° *Vitesse d'hydrolyse en fonction de la réaction du milieu.* — Nous avons été amené à explorer une gamme très étendue de pH et même, du côté acide, à utiliser des milieux où la notion de pH ne s'applique plus. Nous avons voulu ainsi raccorder nos expériences avec les essais d'hydrolyse en milieu très fortement acide réalisés par nos prédécesseurs. Elles s'étendent donc depuis le milieu obtenu avec la soude à la concentration normale jusqu'à ceux contenant l'acide sulfurique à la concentration 10 N en passant par les pH 0, 1, 2, 5 et 9. Les résultats obtenus (*fig.* 1) montrent

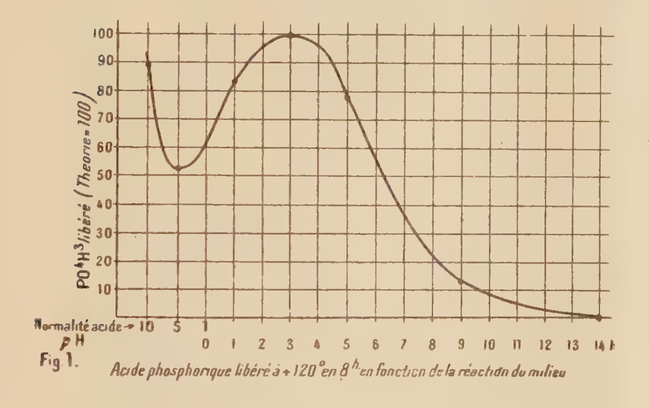


Fig. 1. Acide phosphorique libéré à + 120° en 8h en fonction de la réaction du milieu

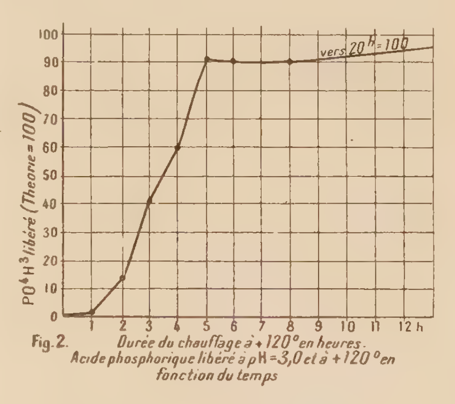


Fig. 2. Acide phosphorique libéré à pH = 3,0 et à + 120° en fonction du temps

que la vitesse d'hydrolyse (appréciée d'après la quantité d'acide phosphorique libérée au bout de 8 heures à + 120°) passe par un maximum très net pour un milieu dont le pH est situé aux environs de 3.

Au-dessus de ce pH la vitesse diminue rapidement; cependant, en milieu alcalin (pH 9), l'hydrolyse peut encore se manifester et il faut arriver à des milieux de pH très élevé pour que la stabilité de l'ester paraisse réellement complète. Au-dessous de pH 3, la vitesse diminue également avec rapidité au fur et à mesure que le pH s'abaisse, tout en restant encore notable à pH 0. Elle continue à s'abaisser encore pour des concentrations en acide sulfurique passant de N à 5 N, et c'est seulement pour des concentrations plus fortes que la vitesse d'hydrolyse, après ce minimum, augmente à nouveau rapidement. On entre alors dans la zone utilisée par nos prédécesseurs, mais on voit que, pour atteindre la vitesse d'hydrolyse observée vers pH 3, il faut réaliser des concentrations en acide qui atteignent 10 N,

c'est-à-dire des titres de l'ordre de 50$^{g}$ d'acide sulfurique pour 100$^{cm^3}$ de solution.

2° *Vitesse d'hydrolyse en fonction de la durée.* — Nous avons opéré au pH optimum de 3,0 en chauffant nos solutions à + 120° pendant des temps variables. Nos résultats (*fig.* 2) montrent que la quantité d'acide phosphorique libéré, fonction de la vitesse d'hydrolyse, est peu appréciable au bout de 2 heures (15 % environ), mais s'accroît ensuite très rapidement jusqu'à la 5$^{e}$ heure où elle atteint environ 90 %. A partir de ce moment elle ne croît plus que très lentement, puisque à la 8$^{e}$ heure elle n'est pas très sensiblement différente de la quantité observée à la 5$^{e}$ heure. Enfin à la 20$^{e}$ heure elle est totale. L'hypothèse la plus simple pour expliquer ces particularités consiste à admettre qu'à partir de la molécule d'hexaester l'acide phosphorique serait détaché progressivement avec formation successive d'esters de moins en moins phosphorylés et que ces esters auraient des stabilités différentes. On sait, depuis les travaux de S. et Th. Posternak [2], que certains de ces esters peuvent être isolés et, pour quelques-uns d'entre eux, précisément dans des conditions qui mettent en jeu les stabilités différentes des diverses liaisons esters. Toutefois, à notre connaissance, des données numériques précises sur leurs vitesses d'hydrolyse manquent encore, et la vérification de notre hypothèse a besoin de s'appuyer sur de nouveaux travaux.

Dans les expériences où l'hydrolyse nous paraissait totale d'après l'acide phosphorique libéré, nous avons tenu à confirmer ce résultat en dosant l'inositol et en extrayant ce composé. Nos dosages nous ont donné les résultats prévus et nous avons pu isoler l'inositol à l'état pur et cristallisé.

En résumé, comme dans le cas de l'acide glycérophosphorique, la vitesse d'hydrolyse chimique de l'acide inositohexaphosphorique varie en fonction du pH de la solution. Elle est maximum pour pH 3 environ. L'étude de l'hydrolyse à pH 3 en fonction du temps révèle des particularités qui ne peuvent s'expliquer qu'en admettant une libération d'acide phosphorique par stades successifs. Ces faits peuvent être utilisés pour une préparation relativement commode de l'inositol à partir du sel commercial calcico-magnésien de l'acide inositohexaphosphorique.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Les méandres de la Basse Seine.* Note [1] de MM. A. Cholley et Ab. Firmin, présentée par M. Emmanuel de Martonne.

Les méandres de la Basse Seine sont remarquables par leur *gigantisme* (exagération du gabarit) et par le fait que ces sinuosités ne composent pas un *train de méandres* régulier.

---

[2] *Helv. Chim. Acta,* 12, 1929, p. 1165.

[1] Séance du 4 juin 1945.

On peut y distinguer trois systèmes, différents par le régime de sinuosités, le gabarit et même la longueur d'onde.

1° *Les petits méandres de la forêt de Brotonne* forment un nœud de trois petits méandres dont Chaput a souligné le rapport avec le remblaiement de 55$^{m}$. L'étude morphologique montre qu'au-dessus de 35-40$^{m}$ le profil des versants offre partout un talus incliné, trace des bords d'une ancienne auge alluviale qui ne présentait que des sinuosités très amorties et dont le fond rocheux correspond sans doute au thalweg de la vallée plio-pléistocène avant les remblaiements de 90-100$^{m}$ et de 55-60$^{m}$.

2° *Les grands méandres* (de Rouen à Aizier et les méandres de l'estuaire) :

*a. Les méandres témoins de l'estuaire* sont encore assez bien calibrés et semblent avoir pris naissance à la surface du remblaiement monastirien (terrasse de 15$^{m}$ de Chaput); ils ont été en partie effacés par la transgression flandrienne (sapement des têtes de lobes convexes, comblement des amphithéâtres concaves).

*b. Le train des grands méandres* (de Rouen à Aizier) semble être apparu à la fin du remblaiemet tyrrhénien (30-35$^{m}$). Leur encaissement et leurs déformations correspondent aux deux périodes de creusement (post-tyrrhénien et post-monastirien), mais aussi à la période d'alluvionnement intermédiaire, au cours de laquelle le façonnement et le recul des versants ont été commandés par les conditions de structure (inclinaison des couches) et la résistance inégale des matériaux d'où d'imposantes déformations. Ainsi le méandre de Rouen s'allonge vers le Nord, comme si la rive concave avait glissé sur un plan incliné dans cette direction (plan de la surface infra-miocène) à la faveur des matériaux peu résistants (sables tertiaires) accumulés dans la partie la plus déprimée du fossé tectonique ([2]).

C'est un processus analogue que l'on reconstitue dans le grand méandre de Brotonne et pour la branche orientale du méandre d'Aizier, tandis que la branche occidentale, établie dans le fond de la gouttière tectonique de la Risle correspondant à la partie abaissée du bloc du Havre, a conservé son tracé initial sans être sollicitée par un glissement.

3° *Les sinuosités de la plaine alluviale actuelle* (entre Jumièges et Caudebec) peuvent être considérées comme l'amorce d'un nouveau train de méandres dont l'étude est susceptible de jeter quelques lumières sur la genèse même des trains de méandres antérieurs.

Le mécanisme de leur formation est révélé par la disposition des tourbières (marais d'Heurteauville et marais de Meules) de part et d'autre de la bande profonde d'alluvions qui accompagne le cours du fleuve, et par leur épaisseur anormale (4$^{m}$,50 à 6$^{m}$,50).

---

([2]) Au delà de la faille, le glissement de la rive concave, quoique moins rapide, a dû continuer à la faveur des terrains tendres du jurassique et du crétacé inférieur qui constituent la lèvre soulevée.

Ces conditions impliquent d'abord une certaine stabilité des courbures incompatible avec l'existence de chenaux de déversement, ensuite une édification progressive (elle a commencé au moment où le thalweg était à $6^{m},50$ au-dessous du niveau actuel de la plaine alluviale) et *contemporaine de l'achèvement du remblaiement alluvial flandrien;* leur forme nous apparaît donc liée au dynamisme particulier que marque le dépôt de la charge d'alluvions dans le lit du fleuve à la fin d'une période ou d'une phase d'alluvionnement.

La localisation des sinuosités n'est pas moins suggestive : elles correspondent à une sorte de palier du profil longitudinal, établi immédiatement à l'amont d'une rupture de pente située au droit de Villequier (pente de la Meilleraye à Villequier, 0,0000060; pente de Villequier à la mer, 0,000080, soit 13 fois plus forte). La rupture de pente marque la limite de l'estuaire, le palier correspond à la section intermédiaire (Villequier-Le Mesnil) où se réalise une sorte d'équilibre déterminant l'accumulation et créant un milieu favorable au développement des sinuosités.

La diminution de la vitesse du courant y provoque, en effet, une brusque augmentation dans la charge des matériaux (par rapport au débit), et le fleuve se comporte comme s'il cherchait par l'allongement de son cours une accommodation à cet accroissement de charge.

Le train de sinuosités ainsi amorcé doit se développer progressivement de l'aval vers l'amont à mesure que chaque sinuosité reporte dans ce sens l'augmentation de la charge cause de l'allongement du tracé et jusqu'à ce que, la pente redevenant plus forte, (ce qui se produit à partir du Mesnil, pente entre le Mesnil et Duclair, $0^{m},0125$ par km), la charge en matériaux ne détermine plus une entrave à l'écoulement normal des eaux.

On conçoit enfin qu'il suffirait d'un léger abaissement du niveau de base pour que ce petit train de sinuosités se transformât en train de méandres encaissés et pût être soumis à certaines déformations si les conditions de structure réglant l'évolution des rives concaves par rapport à l'encaissement du thalweg s'y prêtaient.

4° *Conclusions.* — *a.* Les sinuosités de la Basse Seine se répartissent entre plusieurs trains qui ne datent pas de la même époque et n'ont pas le même calibre (certains d'entre eux, les plus évolués, présentant des déformations tendant au gigantisme, en rapport avec des conditions structurales qui ont été précisées).

*b.* Les sinuosités de la plaine alluviale actuelle résultent de l'intervention de phénomènes d'estuaire modifiant la pente du thalweg fluvial et provoquant une augmentation de la charge. Le phénomène semble correspondre à l'achèvement du remblaiement flandrien. On peut supposer que les autres trains de méandres de la Basse Seine se rapportent à des positions différentes du plan d'eau de l'estuaire.

Les fortes et brusques variations de débit et de charge qui ont marqué la fin du remblaiement déterminé par les diverses transgressions interglacières ne semblent pas non plus avoir été indifférentes à leur genèse. L'importance des variations de charge apparaît encore dans le fait que les trains de méandres de la Seine et de ses affluents, dans la région parisienne, apparaissent localisés en amont des confluences importantes.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur l'interprétation des variations séculaires de la température des caves de l'Observatoire de Paris.* Note [1] de M. **Jean Goguel**, présentée par M. Emmanuel de Margerie.

En signalant récemment une variation séculaire de la température des caves de l'Observatoire de Paris, M. Esclangon a suggéré [2] qu'elle pourrait être en relation avec les sources de chaleur interne du Globe.

Il est possible d'étudier par le calcul la façon dont pourraient se transmettre jusqu'au voisinage de la surface des variations de la température interne. Les coefficients thermiques des roches, ou du moins leurs ordres de grandeur, qui seuls nous importent ici, sont bien connus, et l'on peut prendre, pour le coefficient de conduction, $k = 0,005$ C.G.S. et pour la chaleur spécifique, $c = 0,19$, ce qui, avec une densité $\rho = 2,6$, donne pour la diffusion $\alpha$, qui intervient dans l'équation de la propagation de la chaleur, $\partial\theta/\partial t = \alpha(\partial^2\theta/\partial x^2)$, la valeur $\alpha = 0,01$ C.G.S.

On constate dans ces conditions qu'une variation de température ne se transmet à une distance appréciable, ne serait-ce que quelques centaines de mètres, qu'avec un retard de plusieurs siècles et une amplitude considérablement diminuée. Par exemple un dégagement instantané de chaleur produirait, à $500^m$ de distance, une élévation de température qui ne serait complète qu'au bout de quarante siècles. Si l'on tient compte de ce que la surface du sol est maintenue à température constante, et si l'on suppose un dégagement de chaleur instantané à la profondeur de $1000^m$ seulement, on trouve que, pour un point situé à la profondeur de $28^m$, le maximum de température ne serait atteint qu'au bout de 49 siècles. Ce maximum serait 63 fois moins élevé que celui qui se produirait à $500^m$ de profondeur, au bout de deux siècles seulement : la variation de température serait donc à peu près 1500 fois moins rapide à $28^m$ qu'à $500^m$.

On arriverait à une conclusion analogue en supposant la variation de température périodique; avec une période de deux siècles et demi, l'amplitude, qui décroît exponentiellement, se trouve réduite au dixième de sa valeur tous les $113^m$. Tenant compte de la constance de la température en surface, on trouve que l'amplidude de la variation devrait être 13700 fois plus forte à $500^m$ qu'à $28^m$ de profondeur.

Il faudrait donc des variations de température interne extrêmement fortes pour expliquer les variations relativement rapides constatées dans les caves de l'Observatoire. Ces variations auraient affecté d'une façon beaucoup plus importante les assises plus profondes, pour lesquelles rien d'analogue n'a été constaté. En particulier, la température à la profondeur de $500^m$ est bien connue

---

(1) Séance du 30 avril 1945.

(2) *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 981.

dans la région parisienne, grâce aux puits artésiens, qui depuis un siècle n'ont pas mis en évidence de variations notables de la température des eaux.

On peut donc affirmer que les variations de la température des caves de l'Observatoire ne tiennent pas à des variations de la chaleur interne du Globe.

Par contre des calculs analogues montrent qu'une variation de la température superficielle, de période deux siècles et demi, se ferait sentir à la profondeur de $28^m$ avec une amplitude réduite de 44 % seulement. Il semble donc que la variation constatée tienne essentiellement à une variation séculaire de la température moyenne de l'air, de l'ordre de deux degrés.

L'observation de la température d'une cave profonde permet d'étudier de telles variations à longue période, débarrassées des perturbations annuelles ou diurnes, dans des conditions beaucoup plus précises que par la moyenne de températures mesurées à l'air libre, et il faut souhaiter que ces mesures soient poursuivies à l'Observatoire de Paris.

La variation séculaire de la température ainsi mise en évidence paraît en accord avec les variations d'ensemble des glaciers alpins, qui ont passé il y a un siècle par une phase de crue très importante, et sont actuellement en recul.

AÉROLOGIE. — *Sur des traces d'ondes sonores observées sur des sillages d'avion.* Note de M. **Jacques Régnier** (Extrait).

J'ai observé ces traces lors du bombardement d'objectifs militaires de la poche de Royan le 14 avril 1945.

Les bombardiers évoluaient à une altitude de l'ordre de $7000^m$, et étaient presque invisibles; ils laissaient derrière eux des sillages blancs, souvent observés. Le ciel était très clair, le vent presque nul au sol et en altitude, le temps assez frais.

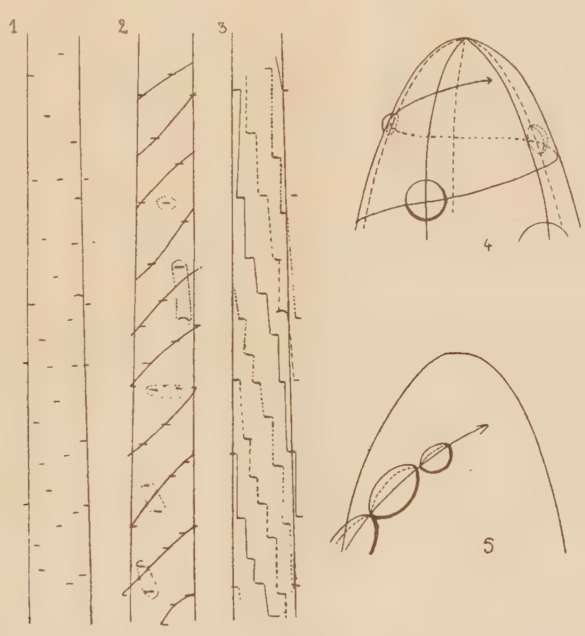
Lorsqu'un chapelet de bombes avait atteint le sol, les ondes provenant des impacts, en atteignant les sillages, y inscrivaient leur passage sous forme d'arcs de cercle, très visibles, plus sombres au bord extérieur; les différents trains d'ondes se croisaient et se recoupaient sur les nuages artificiels, provoquant un phénomène d'une tragique beauté.

On peut envisager d'appliquer l'observation d'un tel phénomène à l'étude de la propagation du son dans l'atmosphère, un sondage aérologique simultané donnant les éléments météorologiques à l'altitude considérée.

BOTANIQUE. — *La phyllotaxie dans le genre* Lilium; *théorie des hélices foliaires multiples.* Note de M. **Lucien Plantefol**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Le type classique de disposition foliaire s'explique par le fonctionnement d'un point végétatif formant *une à une* les ébauches de feuilles qui se trouvent réparties le long de la *spirale génératrice*; deux feuilles successives sont *distantes* l'une de l'autre et forment entre elles par leurs

plans de symétrie un angle, constant dans l'espèce étudiée, différent d'une espèce à l'autre, l'*angle de divergence*. La cause profonde de cette disposition a semblé devoir être cherchée dans la *loi mécanique* de Hofmeister : un primordium foliaire nouveau apparaît sur le cône issu du point végétatif, au milieu de la plus grande surface libre entre le sommet et les primordiums antérieurement formés. Et ceci explique les angles de divergence 2/5, 3/8 etc., si fréquents chez les Dicotylédones, et même les divergences 1/3 et 1/2. L'angle de divergence, la spirale génératrice, voilà les deux faits de la phyllotaxie classique.




1. Fragment de tige de *L. candidum* ouvert suivant une génératrice et montrant la répartition des insertions foliaires. — 2. Essai d'interprétation suivant la spirale génératrice. Les cas aberrants sont entourés par un trait pointillé. — 3. Interprétation par les hélices foliaires. — 4. Schéma d'un point végétatif avec spirale génératrice et ébauches foliaires espacées (divergence 2/5). — 5. Schéma d'un point végétatif avec hélice foliaire et ébauches foliaires contiguës.

Dans le genre *Lilium* j'ai découvert une loi phyllotaxique toute différente.

1° A la loi de divergence, qui écarte les feuilles l'une de l'autre, j'oppose une loi de juxtaposition. Sur la ligne idéale qui les joint, chaque primordium foliaire est *exactement contigu* au précédent; car, sur la tige adulte, ce qui mérite d'être appelé un *segment foliaire* est juxtaposé par l'un de ses bords au segment foliaire précédent, par l'autre au segment suivant; c'est-à-dire que chaque extrémité d'une insertion foliaire est sur la même génératrice que l'extrémité de signe opposé de la feuille voisine. Insertions foliaires et lignes de rappel dessinent un escalier sur l'hélice qui les unit. La notion d'angle de divergence est sans signification : dépendant de deux grandeurs sans rapport direct entre elles (longueur de l'insertion

foliaire, circonférence de la tige), cet angle varie largement et ne saurait fournir une constante phyllotaxique.

2° La spirale génératrice n'existe pas chez les *Lilium*. A vrai dire l'œil, joignant par une ligne idéale les insertions foliaires dans l'ordre de leurs niveaux, trouve parfois le tracé d'une courbe le long de laquelle les insertions sont distantes les unes des autres, conformément à la loi classique. Mais le plus souvent on hésite sur un tracé; il ne peut passer par toutes les feuilles, qui sont *éparses*, ou plutôt éparpillées. Pour la théorie classique, la construction régulière due à la spirale génératrice se sera effacée au cours de la croissance.

Au contraire, appliquant la règle de position définie précédemment, on découvre un ordre presque parfait sous l'apparent désordre. Dans les cas les plus compliqués, toutes les feuilles sans exception apparaissent régulièrement placées sur trois hélices, que je désigne sous le nom d'*hélices foliaires multiples*.

A vrai dire, la première tige annuelle produite par un bulbe jeune ne comporte qu'une hélice foliaire, et les feuilles, en escalier tournant, rappellent avec un pas plus serré la disposition classique des Costoïdées (Zingibéracées). D'année en année, le bulbe s'accroît; une grosseur donnée atteinte, la tige qui se développe présente deux hélices foliaires, de même sens et de même pas, qui se partagent sa surface. Chez *L. candidum* et la plupart des autres espèces, si le bulbe grossit encore sans se diviser, il fournit trois hélices foliaires sur sa tige. La réalité phyllotaxique, ce n'est pas la spirale génératrice, qui ne doit son existence, lorsqu'on pense la trouver, qu'à la régularité des hélices foliaires; ce sont les hélices foliaires multiples.

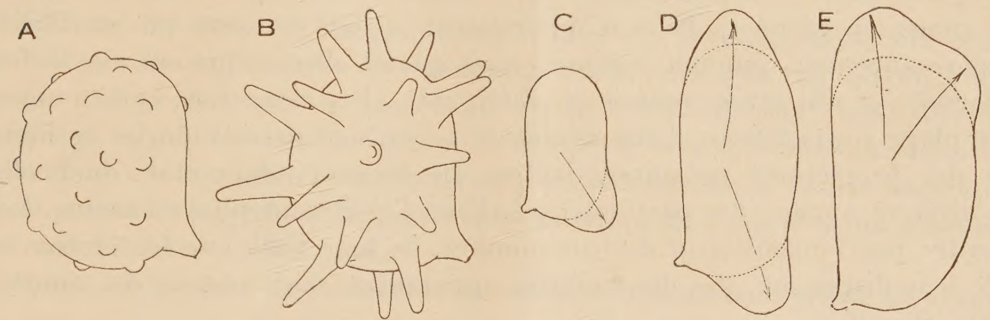
3° Une confirmation est fournie par la numération des feuilles, qui conduit au même total pour les diverses hélices : dans le cas le plus compliqué, je trouve, au-dessous de la grappe florale, pour les trois hélices, 59, 59 et 58 feuilles et, le long de la tige, de semblables concordances sont fréquentes. Les tracés ne sont donc ni arbitraires, ni fortuits.

4° Les distances qui séparent deux feuilles successives sur leur hélice sont parfois régulières (c'est alors qu'une spirale génératrice paraît pouvoir être tracée). Plus souvent on constate une périodicité dans l'allongement des segments foliaires le long d'une même hélice. La périodicité est la même pour les diverses hélices, mais celles-ci sont en discordance de phase; ainsi se réalise une tige droite, malgré les oscillations de la croissance.

C'est donc d'abord une démonstration logique qui établit que la réalité phyllotaxique est constituée chez les *Lilium* par les hélices foliaires multiples.

MYCOLOGIE. — *L'ontogénèse des formes sporales complexes chez les Hyménomycètes.* Note de M. **Georges Malençon**, présentée par M. Joseph Magrou.

Au milieu de la diversité des galbes sporaux que l'on observe chez les Hyménomycètes se remarque un type primitif où la sphère, désaxée selon des règles que nous avons fait connaître ([1]), est l'unique composant morphogénétique. Par étirement il fournit un dérivé immédiat, très répandu, dont le volume générateur devient l'ellipsoïde.




Goniospores du type *Clypeus*. — A-B, *Inocybe calospora*, formation tardive et simultanée des bosses. C-D, *Lepiota castanea*, formation précoce et successive. E, *Inocybe* sp., spore déformée par deux bosses apicales. (Les pointillés marquent la limite approximative du corps fondamental et les flèches donnent l'orientation de croissance des gibbosités.)

Homologue du type sphérique ou ellipsoïdal vrai des Angiocarpes (*Gastéromycètes* s. l.), ce galbe, ou son dérivé, représente, avec l'asymétrie propre aux Hémi-angiocarpes et aux Gymnocarpes (*Hyménomycètes* s. l.) la base de toute la morphogénie sporale de ces deux derniers types de Basidiomycètes. Chez eux en effet cette phase physionomique élémentaire prélude inéluctablement à toute autre forme que peut finalement revêtir la spore et semble y répondre à un équilibre initial nécessaire.

Ainsi établi, ce volume primitif ne s'efface jamais, en dépit des modifications secondaires dont il est fréquemment le siège et d'où naissent précisément les spores complexes. A ce titre il mérite d'être appelé *le corps* ou *volume fondamental* de toute basidiospore.

Les spores complexes (bossuées, astériformes, digitéolées, trigones, éperonnées etc.) résultent toujours de surrections ou de distrophies du corps fondamental et jamais d'effondrements de celui-ci. Leur embryologie les partage en deux catégories inégales. Les plus nombreuses répondent à ce que nous appelons le type *Clypeus* ([2]), d'une formule ontogénétique simple, répandue dans un grand nombre de genres phylétiquement très dissemblables. Les autres forment notre type *Rhodophyllus* ([3]), au déve-

---

([1]) *Comptes rendus*, 215, 1942, p. 584.

([2]) Du nom sous lequel Britzelmayr (1881) a rangé les Inocybes goniospores.

([3]) Ce terme, dû à Quélet (1886), désigne collectivement tous les Agarics rhodosporés à spores anguleuses.

loppement plus compliqué; elles sont peu nombreuses et restreintes aux Agarics rhodogoniosporés.

Le type *Clypeus* se caractérise par un développement prépondérant du corps fondamental, eu égard à l'ensemble final de la spore. Il forme le principal de sa masse, son corps proprement dit, et conditionne en fait sa taille et son profil général. Les bosses y sont des formations surnuméraires d'un volume total comparativement faible. D'apparition typiquement tardive et simultanée (*Inocybe calospora*, *I. asterospora*), elles peuvent aussi être précoces et non synchrones (*Inocybe scabella*, Lépiotes à spores éperonnées). Elles n'apparaissent le plus souvent que sur l'hémispore antérieur, sommet compris, mais quand elles empiètent sur la face dorsale, ce qui arrive parfois (*I. calospora*), elles respectent constamment la plage supra-hilaire. Leur évolution centrifuge permet de les assimiler à des projections radiantes, jaillies du corps fondamental, dont elles n'altèrent aucune des particularités. Elles l'oblitèrent plus ou moins, font naître par l'inconstance de leur nombre, de leur taille, de leur forme ou de leur dispersion, des dissymétries apparentes, mais restent des annexes superficielles.

A cette formule se rattachent, non seulement toutes les goniospores communément reconnues, celles des *Rhodophyllus* exceptées, mais des figures moins répandues nées de la distribution particulière des gibbosités : spores éperonnées par une bosse basale antérieure qu'accompagne souvent une apicale, spores trigones par une apicale et deux basales divergentes etc.

Le cas le plus fréquent est celui où n'existe qu'une simple bosse apicale. L'énorme majorité de spores considérées comme simples se rattache à cet exemple sans qu'on s'en doute, car cette bosse unique est la plupart du temps si bien raccordée au sommet de l'organe qu'elle se confond avec lui et passe inaperçue. Le profil sporal en est pourtant modifié; souvent le sommet est étiré, aminci ou renflé à cause de sa présence. Elle surélève aussi le corps de la spore, accentue l'aspect larmiforme, cylindracé, fusoïde, lancéolé, et fait illusion sur la taille réelle de la spore fondamentale, à laquelle on additionne involontairement celui de sa gibbosité. Pour la même raison, elle trompe encore sur la qualité du profil et du volume d'ensemble, qui paraissent refléter un organe homogène alors qu'ils englobent un complexe où, sur un corps stable, repose un élément fluctuant dans sa taille et dans sa forme. Les spores *calibrées* et certaines sporées hétérogènes n'ont pas d'autre origine.

En résumé, l'ontogénie du type *Clypeus* donne la clé de beaucoup de volumes sporaux; elle fait en même temps ressortir combien leur apparente homogénéité masque une nature souvent hétérogène dont on n'avait pas jusqu'ici notion. Il apparaît désormais nécessaire de tenir compte de ce facteur dans l'analyse des basidiospores, en distinguant toujours le corps fondamental de ses annexes, si l'on veut résoudre d'une manière

convenable les problèmes de morphologie et de morphogénie que soulève l'étude de ces organes.

Ajoutons que le type *Rhodophyllus* permet, de son côté, l'interprétation des rhodogoniospores.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Remarques sur les variations de cote de hauteur, de rayon effectif et de vitesse dans le mouvement révolutif des vrilles.* Note de M. **Antonin Tronchet** et M^me^ **Josette Tronchet**, présentée par M. Joseph Magrou.

Nous avons défini [1] les grandeurs $h$, R et $v^m$. Nous appelons $h$ la cote de hauteur en millimètres du sommet S de la vrille par rapport au plan horizontal passant par sa base O. R est le rayon effectif, c'est-à-dire la longueur en millimètres du segment de droite OS reliant la base au sommet. La valeur $v^m$, exprimée en millimètres par seconde, est la vitesse moyenne de la pointe de la vrille dans l'intervalle de temps de 5 minutes qui s'écoule entre deux relevés consécutifs.

Il est intéressant de rechercher si ces trois grandeurs varient de façon

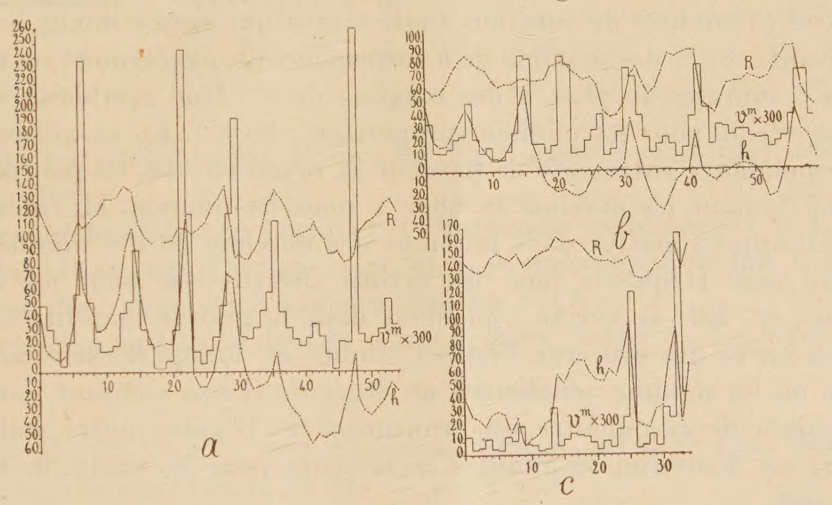



Fig. *a*, *b* et *c*. — Observations 119, 121, 152 (vrilles de *Cyclanthera pedata*). En abscisses, les temps (en intervalles de 5 minutes). En ordonnées, les valeurs $h$ et R (en millimètres) et $v^m \times 300$ (en millimètres par 5 minutes).

tout à fait indépendante ou bien présentent entre elles une certaine corrélation.

On pourrait penser que, par l'effet de la pesanteur, les maxima de vitesse doivent correspondre aux minima de cote de hauteur et les minima de vitesse aux maxima de cote de hauteur. Or il n'en est rien. Les figures *a*, *b* et *c* où sont superposés les diagrammes de $h$, R et $v^m \times 300$ pour trois de nos observations (n^os^ 119, 121 et 152, vrilles de *Cyclanthera pedata*,

[1] *Bull. mens. de la Soc. Linn. de Lyon*, n^os^ 1 et 2, pp. 8-13 et 19-28, 10 fig., 1944. Voir aussi *Soc. Linn. de Lyon*, 9 juin 1945 (à paraître prochainement).

Cucurbitacées) montrent qu'*il existe au contraire une certaine concordance dans le temps* pour les variations des valeurs $h$ et $v^m$. Dans ces trois observations, où les relevés de position ont été effectués à 5 minutes d'intervalle, il ressort de nos graphiques que le plus souvent *les maxima ou les minima de $h$ correspondent respectivement dans le temps aux maxima ou aux minima de $v^n$ soit exactement, soit avec un écart qui excède rarement* 5 *minutes.*

Existe-t-il une relation entre les variations de cote de hauteur ou de vitesse et celles du rayon effectif ? A cet égard nos graphiques $a$, $b$ et $c$ font également ressortir ce fait que, d'une façon générale, *les maxima ou les minima sont atteints par les valeurs $h$, $v^m$ et* R *soit simultanément, soit avec un écart dans le temps de* 5 *minutes au plus.*

Les trois observations auxquelles se rapportent les figures $a$, $b$ et $c$ ne représentent en tout que 12 heures 15 minutes de nutation. Afin de vérifier si la concordance relative des diagrammes de $h$, R et $v^m$ est la règle, nous avons fait une statistique portant sur 24 observations, effectuées également sur des vrilles de *Cyclanthera pedata* et représentant au total 101 heures 10 minutes de nutation. Cette statistique nous a donné les résultats suivants : 82 % des maxima de $h$ correspondent, exactement ou avec un écart de 5 minutes au plus, à des maxima de $v^m$. Une semblable concordance se vérifie pour les minima (proportion : 80 %). En ce qui concerne la correspondance entre cote de hauteur et rayon effectif, les pourcentages sont 70,5 % pour les maxima et 68,5 % pour les minima. La coïncidence exacte ou approximative dans le temps des maxima ou des minima n'est donc pas aussi fréquente pour les rayons effectifs que pour les vitesses moyennes $v^m$. Elle se vérifie cependant dans la grande majorité des cas, au moins en ce qui concerne l'espèce étudiée et, lorsqu'il existe entre les maxima ou les minima consécutifs un écart de temps suffisant pour qu'il soit possible de reconnaître une concordance. D'après notre statistique cet écart est d'environ 30 minutes *en moyenne* pour les vrilles de *Cyclanthera pedata.*

En résumé, bien qu'il n'existe *a priori* aucune corrélation nécessaire entre les grandeurs *cote de hauteur*, *vitesse* et *rayon effectif* et que les valeurs absolues en soient très différentes, leurs oscillations au cours de la nutation se correspondent dans la grande majorité des cas assez fidèlement. C'est là une particularité, à notre avis très remarquable, qui fait ressortir une harmonie jusqu'ici complètement méconnue dans le mouvement révolutif des vrilles.

A $16^h 10^m$ l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à $16^h 30^m$.

A. Lx.